Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Ausblicke

Peter Parczewski

Beispiel Fibonacci-Zahlen (Lineare Algebra + Numerik)

Fibonacci-Zahlen

Definition Fibonacci-Zahlen: $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $F_0 = 0, F_1 = 1$.
Also sind diese

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Das ist eine **rekursive** Folge.

Kann man die *n*-te Zahl direkt angeben?

Ja! - Explizite Formel (von Binet):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Fibonacci-Zahlen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Beweisidee.

- Die Rekursion $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ basiert auf zwei Werten.
- Seien also die ersten beiden $(1,0)$ und $(0,1)$ (linear unabhängig)
- Alle anderen Startwerte kann man daraus linear erhalten: $(x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1)$
- Also ist der Raum aller rekursiven Folgen mit der Vorschrift $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ zweidimensional ($\rightsquigarrow$ **Lineare Algebra**)
- Wir machen den Ansatz $F_n = c^n$
- aus $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ folgt $c^n = c^{n-1} + c^{n-2}$ bzw. $c^2 = c + 1$
- Diese Gleichung hat die zwei Lösungen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- Man sieht direkt, dass $(1,\varphi)$ und $(1,\overline{\varphi})$ linear unabhängig sind
- Also F_n als Linearkombination von φ^n und $\overline{\varphi}^n$ schreiben:Nachrechnen $\rightsquigarrow$ Formel von Binet

Exkurs: Rechenaufwand (Numerik)

Rechenaufwand: Anzahl von Additionen, Multiplikationen (Subtraktionen, Divisionen), weiteren Funktionen (meist komplizierter) (Rechenoperationen)

Beispiele:

- Löse $ax + b = 0$ nach x:
- $x = -b/a$. Also: 1 Division + 1 Subtraktion
- Berechne $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Also: $n - 1$ Multiplikationen
- Matrixmultiplikation:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

- Also 8 Multiplikationen + 4 Additionen (= 12 Operationen)

Fibonacci-Zahlen: Rechenaufwand

- Iteration/Definition: Rechenaufwand für n-te Zahl: $n(+)$ Operationen
- Formel von Binet: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$
- Rechenaufwand n-te Zahl: $2(n-1) + 1(\cdot) + 1(+) = 2n$ Operationen
- Matrixmultiplikation: $\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Aufwand bei $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$: Für $n = 2^k$: k Matrixmultiplikation
- d.h. $12 \cdot k$ Operationen
- Ansonsten $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_t}$ mit $k_1 < k_2 < \cdots < k_t$:
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2^{k_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2^{k_2}} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2^{k_t}}$
- Also ist Aufwand rechts höchstens $2 \cdot k_t$ (da Zweierpotenzen bis dahin)
- Zudem ist $n \geq 2^{k_t} \Leftrightarrow k_t \leq \log_2(n)$
- Also ist Aufwand $2k_t \leq 2\log_2(n) \leq n$ und klar $< n$ für große n (!)