

Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 7. Aufgaben lösen

Peter Parczewski



Beweisverfahren

- 1 **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- 2 **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $(\neg B \Rightarrow \neg A)$
- 3 **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein!
 $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightsquigarrow !)$
- 4 **Beweis durch vollständige Induktion**
- 5 **Beweis durch Abzählen/Kombinatorik**: Man zählt die Objekte (unterschiedlich) ab, dies ergibt eine Formel oder Gleichheit
- 6 **Schubfachprinzip, Bildbeweis, ...**

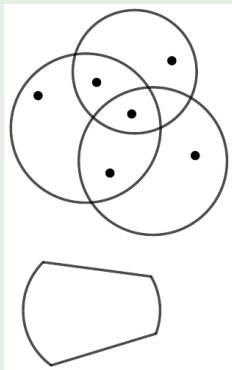
Aufgaben lösen - ein Plan:

- 1 Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
- 2 Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
- 3 Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
- 4 Welche Zusammenhänge siehst du? Hättest du gerne?
- 5 Führe Bezeichnungen ein!
- 6 Ergeben einfache Beispiele Beweisideen?
- 7 Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?
- 8 Abstrahiere: Verallgemeinerung?
- 9 Studiere verwandte Probleme und Theorien!
- 10 Variiere die Aussagen und Aufgaben!

Finde alle Paare $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{m+5}{m-4} = n$?

Aufgaben

Bäuerin Berta hat eine Horde aggressiver Hühner und will sie einzeln trennen und vor Füchsen beschützen. Handwerker Bob bietet ihr kostengünstige Zäune an, die stets kreisförmig sind und sich beliebig übereinander stellen lassen. Beispielsweise kann man mit 3 solchen Zäunen 6 Hühner aufteilen (erste Figur). Die Hühner können frei bewegt werden.

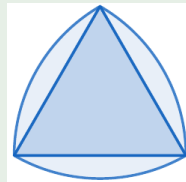
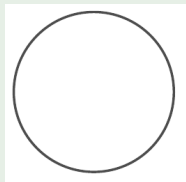


- (A) Wie viele Kreiszäune braucht Bäuerin Berta mindestens für ihre 22 Hühner?
- (B) Wie viele Hühner können mit $n \in \mathbb{N}$ Kreiszäunen maximal getrennt werden?
- (C) Mit einem schweren Hammer schafft es Berta, flache Ränder in die Kreiszäune zu schlagen (z.B siehe untere Figur). Wie viele solcher gehämmerten Zäune genügen nun bereits für die 22 Hühner?

Aufgaben

Für welche natürlichen Zahlen n kann ich ein Quadrat in n Quadrate zerlegen?

Beide Figuren sind mit einem Zirkel konstruiert und haben den Durchmesser 1:



Hat eine Figur den größeren Umfang? Wenn ja, welche?

Aufgaben

Beweise oder widerlege:

Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von genau drei Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von n).

In der Ebene sei jeder Punkt entweder schwarz oder weiß.
Beispielsweise wie rechts.

Zu jeder beliebigen Einfärbung gibt es mindestens zwei Punkte mit Abstand π gleicher Farbe.

