Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 6. Weitere Beweismethoden

Peter Parczewski

Schubfachprinzip

Werden z.B 6 Elemente auf 4 Fächer verteilt, so gibt es stets ein Fach mit 2 Elementen: | ●● | ● | ●● | ● |

Schubfachprinzip

Werden $n > k$ Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 2 Elementen.

Werden $n > 2k$ Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 3 Elementen. Usw. ...

- Verteilt Berta 20 Hühner auf 15 Käfige, so sitzen in mindestens einem Käfig zwei Hühner
- Verteilt Berta 20 Hühner auf 9 Käfige, so sitzen in mindestens einem Käfig drei Hühner
- Beweis?

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

Allgemeines Schubfachprinzip

Werden n Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Beobachtung: Für alle $n, k \in \mathbb{N}\ :\ \lceil n/k \rceil < n/k + 1$

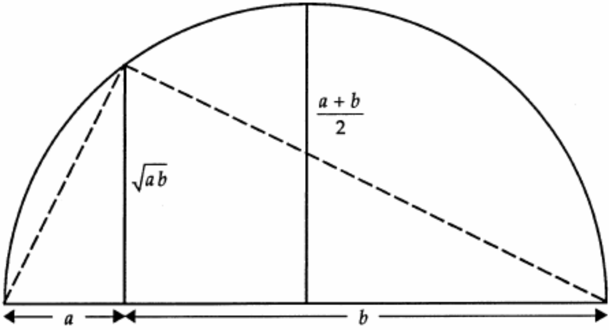
Beweis.

Angenommen, in jedem Fach sind höchstens $\lceil n/k \rceil - 1$ Elemente, so sind insgesamt erst nur $k \cdot (\lceil n/k \rceil - 1) < k \cdot (n/k + 1 - 1) = n$ Elemente verteilt, ein Widerspruch! □

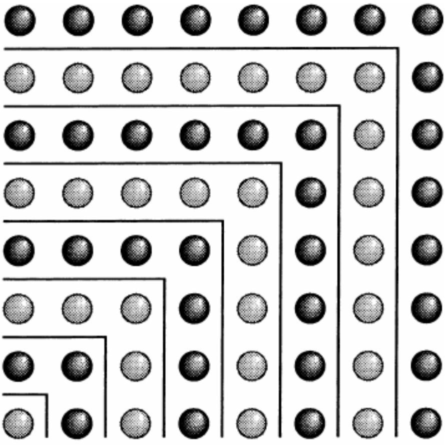
- Bei einer Feier mit 30 Leuten sind mindestens $\lceil 30/7 \rceil = 5$, die am gleichen Wochentag Geburtstag haben
- In einer Gruppe von 100 Studenten sind mindestens $\lceil 100/30 \rceil = 4$, die bei 30 Fragen gleich viele korrekt beantworten

Bildbeweise

Passende Visualisierungen können die ganze Beweisidee enthalten.

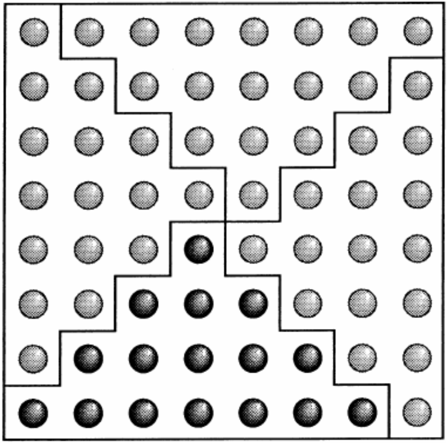


$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

(Abbildung aus R.B. NELSEN: Beweise ohne Worte, Springer, 2016)



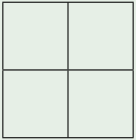
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

(Abbildung aus R.B. Nelsen: Beweise ohne Worte, Springer, 2016)

Aufgaben

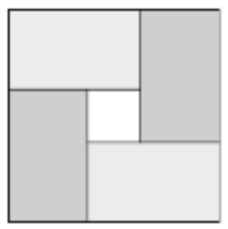
- Sei eine Gruppe von 150 Studenten. Wieviele haben mindestens im gleichen Monat Geburtstag?
- In Mannheim leben etwa 300 000 Menschen. Jeder Mensch hat höchstens 150 000 Haare auf dem Kopf. Gibt es in Mannheim zwei Menschen mit mehr als 5 und genau gleich vielen Haaren auf dem Kopf?

Beweise oder widerlege mit dem Schubfachprinzip: Unter je fünf Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 2 gibt es mindestens zwei mit Abstand $\leq \sqrt{2}$.



Aufgaben

Welche Ungleichung für $a, b \geq 0$ kann man aus diesem Bild gewinnen?



Finde einen Bildbeweis/Beweisidee für die Summenformel

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$