Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 5. Induktion und Abzählen

Peter Parczewski

Induktion

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Wenn zugleich gelten:

1. Es gilt $A(1)$ (**Induktionsanfang**)
2. $\forall n \geq 1 \ : \ A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (**Induktionsschritt**)

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang kann auch ein festes $N > 1$ sein.

Für jede natürliche Zahl n gilt $3^n \geq n$ ($\forall n \in \mathbb{N} : 3^n \geq n$)

Beweis.

Für $n = 1$ ist klar $3^1 = 3 \geq 1$. (Das war der Induktionsanfang).
Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die **Induktionsvoraussetzung** $3^n \geq n$. Dann ist für $n + 1$:

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \geq n \cdot 3 = n + 2n \geq n + 1$$

(Das war der Induktionsschritt). □

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Betrachten wir die ersten Anordnungen:

$$1 \qquad 12|21 \qquad 123|132|213|231|312|321$$

Beweis.

Für 1 gibt es nur die Anordnung 1. (Induktionsanfang). Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die Induktionsvoraussetzung $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Die weitere Zahl $(n+1)$ können wir bei den Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n, n+1$ an einer der Positionen 1 bis $n+1$ stellen. Steht sie an der ersten Position, gibt es nach Voraussetzung genau $A(n)$ Anordnungen. Steht sie an der zweiten Position ebenso, usw. Also ist

$$A(n+1) = A(n) \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1).$$

(Das war der Induktionsschritt). $\square$

Abzählen

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Beweis durch Abzählen.

Wir zählen die Anzahl der Umordnungen von $1, 2, \ldots, n$. Für das erste Element 1 haben wir n Plätze. Für das zweite Element 2 haben wir anschließend nur noch $n-1$ Plätze. Usw: Für das k-te Element haben $n-k+1$ Plätze. Also erhalten wir als Anzahl der Umordnungen $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ □

$$
\begin{cases}
(a+b)^1 = a+b \\
(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \\
\vdots
\end{cases}
$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$:= Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: a^k enthalten
3. a^k nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
4. Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus n Klammern $(a+b)$ jeweils genau k mal a
5. Das ist gerade die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$
6. also: Produkt $(a+b)^n$ ist Summe über alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
7. Damit folgt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $\square$

Geometrische Summe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$(1-x)\left(1+x+x^2+\dots+x^n\right) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$$
2. Insbesondere ist für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$:
$$1+x+x^2+\dots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis.

- Ausmultiplizieren ergibt 1.

  (da alle x^k, $k = 1, \dots, n$ mit $+$ und $-$ vorkommen)
- 2. folgt direkt aus 1. durch Division mit $1 - x \neq 0$ $\square$

Beispiel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{1-(1/2)^{11}}{1-1/2} = 2 - (1/2)^{10}$$

Aufgaben

Beweise mit vollständiger Induktion:

- Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
- Geometrische Summe: Für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$
- Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$.

Beweise mit Induktion oder Abzählen die Aussage:

Die Summe der ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots, (2n-1)$ ist n^2.