Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 4. Beweismethoden

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beweismethoden

Direkter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man bei Voraussetzung von A zeigt, dass B gilt.

Satz. Das Quadrat jeder geraden Zahl ist auch gerade.
$(\forall n \in \mathbb{N} : n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \in 2\mathbb{N})$

Beweis.

Angenommen $n \in 2\mathbb{N}$, so gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$. Dann ist aber $n^2 = (2m)^2 = 2(2m^2) \in 2\mathbb{N}$. □

Weitere direkte Beweise bisher:

- Unsere Beweise für logische Äquivalenz (Wahrheitstafeln)
- Unsere Beweise über Eigenschaften der leeren Menge
- Unsere Aufgaben zu Mengen

Beweis durch Kontraposition

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt zeigt.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

(Beweis durch Kontraposition heißt auch indirekter Beweis)

Satz. Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. $(\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N})$

Beweis.

Wir wollen also für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen: $n \notin 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \notin 2\mathbb{N}$: Angenommen $n \notin 2\mathbb{N}$, so ist es ungerade und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist aber $n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1 \notin 2\mathbb{N}$. □

Beweis durch Widerspruch

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man annimmt, dass diese Aussage falsch ist, d.h. es gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, und zeigt, dass ein Widerspruch folgt.

A	B	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	f	f
f	f	f	f

Satz. Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. $(\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N})$

Beweis.

Sei $\neg\left(n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}\right)$, d.h. $(n^2 \in 2\mathbb{N}) \wedge (n \notin 2\mathbb{N})$. Da n ungerade, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist $n^2 = (2m-1)^2 \notin 2\mathbb{N}$, ein Widerspruch zur Annahme $n^2 \in 2\mathbb{N}$. $\square$

Beweis durch Widerspruch

Satz. $\forall a, b \in \mathbb{R} : 2ab \leq a^2 + b^2$.

Beweis.

Angenommen, die Aussage sei falsch, d.h. es ist $2ab > a^2 + b^2$, dann ist aber der Widerspruch $0 > a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$. $\square$

Satz. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis (Euklid, 300 v. Chr.)

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, nämlich $N \in \mathbb{N}$ viele. Sei ihr Produkt $p_1 \cdots p_N \in \mathbb{N}$ und p_N ist die größte mögliche Primzahl. Da $p_1 \cdots p_N + 1 \in \mathbb{N}$, muß es entweder selbst Primzahl sein (größer als p_N Widerspruch!) oder es hat eine Primfaktorzerlegung. Ein solcher Primteiler p teilt aber $p_1 \cdots p_N$ und $p_1 \cdots p_N + 1$, so müßte stets $p = 1$ sein, was keine Primzahl ist, ein Widerspruch! $\square$

Beweis durch Widerspruch/Gegenbeispiel

Für alle $b, c \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ mindestens eine reelle Lösung.

Beweis.

Es genügt ein Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.
Seien $b = 0$ und $c = 1$, so ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
Das Quadrat einer reellen Zahl ist nichtnegativ ($x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$ $\rightsquigarrow$ **Studium**)
Also gibt es hier keine reelle Lösung x und die Aussage ist falsch. $\square$

Offenbar erhalten wir:

Satz. Es gibt $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ keine reelle Lösung besitzt.

Beispielsweise für $b = 0$ und $c = -1$ bzw. $b = c = 0$ erhalten wir ebenso:

Satz. Es gibt jeweils $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$

- genau zwei reelle Lösungen besitzt
- genau eine reelle Lösung besitzt.

Beweismethoden

Satz. Für jede ganze Zahl z ist die Summe von z und der Vorgängerzahl stets ungerade. ($\forall z \in \mathbb{Z} : z + (z-1) \notin 2\mathbb{Z}$ bzw. $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow z + (z-1) \notin 2\mathbb{Z}$)

Direkter Beweis ($A \Rightarrow B$).

Sei $z \in \mathbb{Z}$, so ist die zu untersuchende Summe $z + (z-1) = 2z - 1$. Das ist also stets ungerade. $\square$

Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$).

Wir zeigen: Ist besagte Summe gerade, dann ist $z \notin \mathbb{Z}$: Sei also ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $z + (z-1) = 2z - 1 = 2m \in 2\mathbb{Z}$. Dann folgt aber $z = \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. $\square$

Beweis durch Widerspruch ($\neg(A \Rightarrow B) \rightsquigarrow$!)

Angenommen, die Aussage sei falsch, d.h. es gilt $z \in \mathbb{Z}$ und zugleich $2z - 1 \in 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es also ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $2z - 1 = 2m \in 2\mathbb{Z}$, d.h. wir erhalten den Widerspruch $z = \frac{2m+1}{2} \notin \mathbb{Z}$ und zugleich $z \in \mathbb{Z}$! $\square$

Aufgaben

Beweise jeweils mit allen drei Beweismethoden

1. Direkter Beweis ($A \Rightarrow B$)
2. Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
3. Beweis durch Widerspruch ($\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightsquigarrow !$)

die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.
- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.
- Seien die Mengen A, B, C. Wenn $A \subseteq B$, dann ist $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

Seien A und B endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von A.
Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$