Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 3. Funktionen

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Funktionen

Eine **Funktion** oder **Abbildung** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $f(a) \in B$ zu.

- Unter einer *Funktion* (Abbildung) $f : A \to B$ für Mengen A, B versteht man also eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$.
- Dabei ist b das *Bild* von a, bzw. a das *Urbild* von b.
- Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a)|a \in C\} \subseteq B$ das *Bild* von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a|f(a) \in D\} \subseteq A$ das *Urbild* von D.
- Die Menge $f(A)$ heißt *Wertebereich/-menge* und A *Definitionsbereich/-menge* von f.

Funktionen Beispiele:

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, f(z) = 2 + z^4$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + c$ (allgemeine lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)

Etwas bekannt sein sollten bereits viele elementare Funktionen und Eigenschaften (Definitionsmenge, Wertemenge, Symmetrie, Monotonie, Nullstellen, Extrema).

Beispielsweise die elementaren Funktionen:

- Polynome
- $\sqrt{x}$
- $\frac{1}{x}$
- $\frac{1}{x^2}$
- e^x, a^x
- $\ln(x)$
- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\tan(x)$

Funktionen werden stets thematisiert $\rightsquigarrow$ **Studium**

Weitere Beispiele Funktionen:

- Anzahl Elemente: $|\cdot|\ : \{M \subset \mathbb{Z} : M \,\text{endlich}\} \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, M \to |M|$
- Maximum einer nichtleeren Menge:
  $\max : \{\emptyset \neq M \subset \mathbb{Z} : M \,\text{endlich}\} \to \mathbb{Z}, M \mapsto \max M$
- Gerade/ungerade: $f : \mathbb{Z} \to \{g, u\}, f(n) = \begin{cases} g, & n \in 2\mathbb{Z} \\ u, & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$
- Größter gemeinsamer Teiler: $ggT : \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{N},\ (a,b) \mapsto ggT(a,b)$

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow \ \forall x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow \ f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$\Leftrightarrow \forall y \in Y \, \exists! \, x \in X : f(x) = y$

$f^{-1} : Y \to X, \ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von f**

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist sujektiv aber nicht injektiv
- $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv
- $f : [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist bijektiv
- Anzahl Elemente: $| \cdot | \ : \{M \subset \mathbb{Z} : M \,\text{endlich}\} \to \mathbb{N}_0$ ist nur surjektiv
- Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, f(x) = e^x$ ist bijektiv

Aufgaben

Welche Vorschriften sind Funktionen (d.h. welche sind wohldefiniert?)
Skizziere die Funktion (außer *)!
Welche Funktion ist injektiv, surjektiv oder gar bijektiv?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = (x+1)^2 - 1$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x - \pi/2)$
- $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2\sin(x)$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3(2^n)$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(n) = \max\{z : z \in \mathbb{Z}, z \leq x\}$
- * $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), f(M) = M \cap \mathbb{Q}$