Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 2. Mengen

Peter Parczewski

Mengen

$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**).
Analog wird bei $=:$ bzw. $\Leftrightarrow:$ die rechte Seite definiert.

- $\sqrt{2} :=$ die positive reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst
- $A|B := \neg(A \wedge B)$

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M $(x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M))$

Definition einer Menge oftmals durch eine Aussageform:

$$M := \{x : p(x)\} \qquad \text{bzw.} \qquad M := \{x \,|\, p(x)\}$$

Mengen Beispiele:

- $\{1, 2, 3\}$
- $\emptyset := \{\}$ (leere Menge)
- $\{x : x^2 < 10\}$
- Beatles $:= \{$John, Paul, George, Ringo$\}$
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ (natürliche Zahlen)
- $\{\varepsilon, \xi, \alpha, \mathbb{N}, \text{Mannheim}\}$

Mit **Quantoren** wird eine Aussage A (oft als Prädikat $A(\cdot)$) über Elemente einer Menge M getroffen:

$\forall x \in M : A$ **Für alle** Elemente x in M gilt A

$\exists x \in M : A$ **Es gibt (mindestens) ein** Element x in M, für das A gilt

$\exists! x \in M : A$ **Es gibt genau ein** Element x in M, für das A gilt

Statt $\forall x \in M : A(x)$ schreibt man auch $A(x),\ x \in M$

Welche Aussagen sind wahr?

- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$
- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 11$
- $n \in \mathbb{N}$ gerade $:\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : m > 2n$
- $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 5 \Rightarrow n^2 > 20$
- $\forall n \geq 5 : n^2 > 20$

Schreibe die folgenden Aussagen mit Mengen und Quantoren:

- Alle natürlichen Zahlen größergleich 10 sind echt größer als 9
- Zu jeder ganzen Zahl gibt es eine Quadratzahl, die im Betrag größer ist

Relationen und Definitionen für Mengen:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow\ \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$	A **Teilmenge** von B
$A = B :\Leftrightarrow\ (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	**Gleichheit**
$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung**
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	**Durchschnitt**
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	**kartesisches Produkt**
$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	**Komplement** von B in A
A, B **disjunkt** $:\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$	(auch als $A \dot{\cup} B$)

Beispiele:

- $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(= 2\mathbb{N})$
- $\{n \in \mathbb{N} : n > 2\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 10\} = \{3\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (1, B), (2, B), (3, B)\}$

Welche Aussagen sind wahr?

- $\{1, 2\} \times \{A, B\} = \{A, B\} \times \{1, 2\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3\}$

Wichtige Zahlenmengen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N})$
- $\mathrm{Prim} := \{n : n \geq 2, n \text{ hat nur die Teiler } 1 \text{ und } n\}$
- $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ (rationale Zahlen)
- $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen)
- Es gilt die echte Inklusion: $\mathrm{Prim} \subsetneqq \mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$
- Intervalle $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossen),
  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offen)

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- $\emptyset \neq \{0\}$

Die **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$$

Es ist:

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\mathcal{P}(\{1,\pi,\Omega\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{\Omega\}, \{1,\pi\}, \{1,\Omega\}, \{\pi,\Omega\}, \{1,\pi,\Omega\}\}$

Es gilt für jede Menge M:

- $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$

Die naive Definition der Menge führte zu Widersprüchen!
($\rightsquigarrow$ Grundlagenkrise der Mathematik)
Ist das eine Menge?

$$R := \{x \text{ Menge} : x \notin x\} \quad \text{(Russell 1903)}$$

Unendlichkeiten

Mengen wie

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ 2\mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^n$$

haben nicht endlich viele Elemente

d.h. sind nicht endlich (bzw. unendlich)

(Verschiedene *Arten* von Unendlichkeit $\rightsquigarrow$ Studium + Ausblicke später)

Eine wichtige Unterscheidung:

- Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann **beliebig groß** sein

  Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist aber immer noch endlich

- Die Menge $\mathbb{N}$ ist **unendlich**

- Studium (v.a. Analysis) $\rightsquigarrow$ n geht gegen Unendlich $\rightsquigarrow$ **Konvergenz**

Aufgaben

Bestimme für die Mengen

$$A := \{1,2\},\ B := \{\{1\},\{2\}\},\ C := \{1,\{1,2\}\},\ D := \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

welche Aussagen wahr sind:

- $A = B$
- $A \in C$
- $A \subseteq C$
- $B \in D$
- $B = D \setminus \{1,2\}$
- $\{A\} \in D$
- $A \cap D = \{\emptyset\}$
- $A \cup B \cup C \cup D \in \mathbb{N}$
- $B \cap C = A \setminus \{2\}$

Beweise für Mengen A, B, C die Gleichheit mittels $\subseteq$ und $\supseteq$:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Aufgaben

Bestimme für die Mengen

$$A = \{H, a, l, l, o\},\ B = \{M, a, n, n, h, e, i, m\},\ C = \{B, a, n, a, n, e\}$$

die Mengen:

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B$
- $\mathcal{P}(C)$
- $(A \cup B) \setminus C$
- $A \setminus (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C$
- $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$
- $A \times C$

Welche Aussagen für die Mengen A, B und C sind immer wahr?
Gibt es ansonsten ein Gegenbeispiel?

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$