

Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 1. Aussagen

Peter Parczewski



Aussagen (Aussagenlogik)

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, zugeordnet werden kann.

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Am 28.08.1819 hat es in Mannheim geregnet
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Grüßgottle!
- 4
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (d.h. Differenz ist 2)
- Mannheim liegt am Meer und $3 < 5$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 3 teilbar
- Mein Name auf klingonisch übersetzt lautet *nagh*
- Dieser Satz ist falsch

Sind A und B Aussagen, so bildet man zusammengesetzte Aussagen:

$\neg A$ Nicht A (A gilt nicht)

$A \wedge B$ A und B gelten gleichzeitig

$A \vee B$ Es gilt A oder B (oder beide!)

$A \Rightarrow B$ Aus A folgt B (Wenn A , dann B)

(A ist **hinreichend** für B bzw. B ist **notwendig** für A)

$A \Leftrightarrow B$ A gilt genau dann, wenn B gilt (A und B sind **äquivalent**)

d.h. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Deren Wahrheitswerte werden durch Wahrheitstafeln definiert:

A	$\neg A$				
w	f				
f	w				
A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen?

- Mannheim liegt am Meer und $\pi^3 > \sqrt{11}^3$
- Wenn $4 > 7$, dann duftet es heute in Mannheim nach Schokolade
- 309 ist genau dann eine Primzahl, wenn Mannheim am Meer liegt
- $\pi^7 > 1000$ oder $\pi^7 \leq 1000$
- Donald kann lesen und Donald kann nicht lesen

Satz. Für jede Aussage A gilt:

- $A \vee \neg A$ ist immer wahr (**Tautologie**)
- $A \wedge \neg A$ ist immer falsch (**Kontradiktion/Widerspruch**)

Logische Äquivalenz von Aussagen mittels Wahrheitstabeln. Z.B.:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Also ist $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Wahrheitswerte weiterer zusammengesetzter Aussagen analog. Z.B.:

A	B	C	$A \vee B$	$A \Rightarrow C$	$(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f
f	f	f	f	w	f

Zeige mittels Wahrheitstafeln die logische Äquivalenz:

• $(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$

• $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

• $(A \vee f) \Leftrightarrow A$

• $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(Ja, damit sind wir schon in der Mathematik!)

Ein **Term** ist ein (syntaktisch) sinnvoller Ausdruck aus Zahlen, Variablen, Klammern und mathematischen Verknüpfungen

Welche Ausdrücke sind Terme?

- $13 + \pi$
- Grüßgottle!
- $x + 4y$
- $\sin(13 + \pi) <$
- Primzahl
- $(x + y \wedge 5$

Ein **Prädikat (Aussageform)** ist ein Ausdruck mit Variablen, so dass beim Einsetzen von Termen in die Variablen eine Aussage entsteht.

Welche Ausdrücke sind Prädikate?

- $x < 4$
- $a^2 + 5a + 3 = 0$
- $x > 5$ und Schokolade
- Am Tag x hat es in Mannheim geregnet und y ist ein Wort
- $x \geq 20$ ist eine Primzahl

Aufgaben

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.
- Es gibt weiteres Leben (auf Planeten, Monden) in unserem Sonnensystem.
- Auf einer Kirchenorgel sollte nur Bach gespielt werden.
- Wenn es in Mannheim nach Schokolade duftet, dann ist Sommer.

Untersuche den Wahrheitswert (durch Wahrheitwerttabellen) der zusammengesetzten Aussagen (aus den Aussagen A und B):

- $(A \vee B) \Rightarrow B$
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge A$
- Folgere (ohne weitere Tabellen), welche Aussage wahr ist:
 - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
 - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
 - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$

Aufgaben

Donald und Boris verhandeln. Donald sagt von Montag bis Freitag und Boris von Montag bis Donnerstag stets die Unwahrheit. An den restlichen Tagen sagen Sie stets die Wahrheit. Sie begegnen sich beim Frühstück:

Boris: Gestern habe ich nur gelogen.

Donald: Ich auch.

Welcher Tag ist heute?

Gegeben sind die beiden Aussagen

- A** Das Viereck ist ein Quadrat
 - B** Die Diagonalen des Vierecks stehen senkrecht aufeinander
- Ist A notwendig für B?
 - Ist A hinreichend für B?
 - Ist A notwendig und hinreichend für B?

Aufgaben

Welche Symbole aus \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow ergeben jeweils wahre Aussagen?

- $x^2 = 9 \text{ ??? } x = 3$
- $x^2 = 9 \text{ ??? } x = 3 \text{ oder } x = -3$
- $x = \sqrt{9} \text{ ??? } x = 3$
- $x = \sqrt{9} \text{ ??? } x = 3 \text{ oder } x = -3$
- $x = a \cdot b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N} \text{ ??? } x \in \mathbb{N}$
- $x \neq a \cdot b$ für alle $a, b \in \mathbb{N} \text{ ??? } x$ ist prim

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $3 < 6 \Rightarrow \pi$
- $3 < 6 \Rightarrow \pi$ ist gerade
- $3 > 6 \Rightarrow \pi$ ist gerade
- n ist gerade $\Rightarrow n^2$ ist gerade
- n ist gerade $\Leftarrow n^2$ ist gerade