Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - 0. Einführung

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Wer redet da?

DR. PETER PARCZEWSKI

Universität Mannheim
Institut für Mathematik
LS Wirtschaftsmathematik II
(Stochastische Numerik)

Studium/Promotion:

- **Mathematik** (+ Physik + Biologie + Philosophie)

Lehre/Forschung:

- Stochastik + Funktionalanalysis + Numerik

Vorkurs Elemente

- Videos (online)
- Folien zu Videos (Webpage)
- online Vorlesungen/Diskussionen/Übungen
- Plan/Zeitplan der Inhalte (Webpage)

Einführung (diese Folge)

1. Mathematik und Schulmathematik
2. Beispiele für Mathematik
3. Vorkurs: Wiederholung Schulmathematik
4. Sätze und Beweise

Mathematik im Studium ist Neuanfang!

- Schulmathematik nützlich, aber nicht notwendig!

Was eher wichtig wird:

- Denken und Knobeln mögen
- Zusammenhänge verstehen wollen
- Mathematik machen und anwenden wollen
- Mathematische Sprache (saubere Begriffe und Argumente!) erlernen wollen

Mathematik an der Uni - Beispiel

Für welche reellen Zahlen gilt $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$?

- Notwendig, damit $\sqrt{ab}$ definiert: $ab \geq 0$
- Für $a, b < 0$ Widerspruch: $0 < \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} < 0$
- Also notwendig $a, b \geq 0$
- $$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 0 \leq a + b - 2\sqrt{ab}$$
  $$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \checkmark$$
- Somit Beweis der Aussage: Für alle $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$:

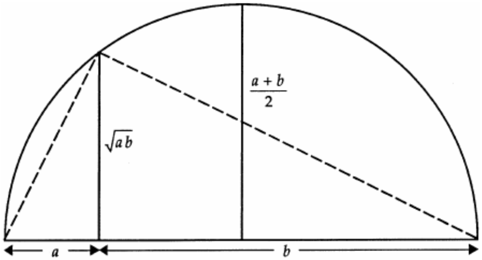
  Da $x^2 \geq 0$ für alle reellen x, ist für alle $a, b \geq 0$: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

  Nach Umformen ist $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.

  Also folgt somit $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Mathematik an der Uni - Beispiel

Für welche reellen Zahlen gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$?



- Allgemeiner: AM-GM-Ungleichung

  Seien $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, so gilt:

$$\left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

  Ungleichung zwischen **A**rithmetischen und **G**eometrischen **M**ittel.

  $\rightsquigarrow$ Studium: Viele weitere Ungleichungen, Verallgemeinerungen, ...

Mathematik - Uni

Wiederholung Schulmathematik:

- **(MINT BW) Online-Brückenkurs** Link: Online-Brückenkurs
  Schulstoff und noch etwas mehr. Sehr sauber und ausführlich. Übungen integriert (Lösungen vorhanden). Abschlusstests.

- **Uni Mannheim VWL Wiederholungskurs**: Link: Skript
  Skript mit Beispielen und Übungen+Lösungen. Viele Begriffe werden in eurem Studium genauer eingeführt.

- **Uni Wien Materialien** Link: Mathematik macht Freu(n)de
  Vorkurs Mathematik (Schulstoff und mehr): Link: Vorkurs Mathematik
  Arbeitsblätter, Übungsblätter und Videos zu einer Fülle von Themen. Von Schulstoff bis ins Studium.

- **Hilfreicher im Studium:** Die in den Grundvorlesungen verwendete Literatur zu Analysis und Lineare Algebra (genauere Hinweise in den Vorlesungen bzw. generell bei allen Dozenten)

In Vorkurs wiederholen wir ein paar Basics:

- Potenzen, Logarithmen (Rechnen)
- Gleichungen und Ungleichungen
- (Elementare) Funktionen
- Lineare Algebra (Vektoren)
- Differentiation und Integration

Sätze und Beweise

Satz

Die Kreiszahl π ist irrational.

Beweis

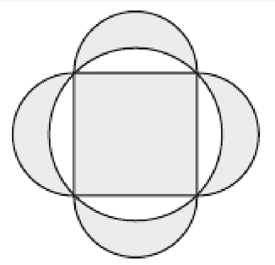
Angenommen, π ist rational, d.h. $\pi = \frac{m}{n}$ für natürliche Zahlen ...

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage

  d.h. entweder **wahr** oder **falsch** $\rightsquigarrow$ Logik

- Der **Beweis** ist logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und
- Definitionen (z.B. rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$)
- Sätze + Beweise $\implies$ **neue** Sätze + **neue** Beweise

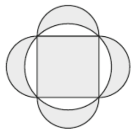
Mathematik durch Mathematik

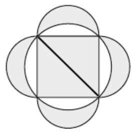


Welche Fläche ist größer:

- Das Quadrat (Seitenlänge 1)?
- Die vier Mondsicheln (entstanden durch Kreise und Halbkreise)?

Mathematik durch Mathematik



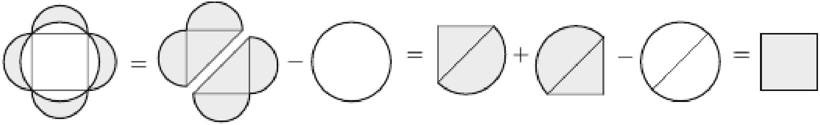


Rechnung:

- Fläche Quadrat $Q = 1^2 = 1$
- Fläche 2 Mondsicheln ($M/2$) nebeneinander:
  kleiner Kreis - großer Halbkreis + halbes Quadrat:
  $M/2 = \pi(1/2)^2 - \frac{1}{2}(\pi(\sqrt{2}/2)^2) + 1/2 = \pi/4 - \pi/4 + 1/2 = 1/2$
- Also ist $Q = M = 1$

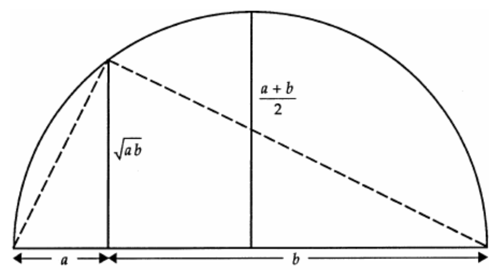
Alternativer Beweis:

- Mit **Pythagoras für Halbkreise** (zweite Gleichung) ist:



Aufgaben

Begründe die eingezeichneten Längen $\sqrt{ab}$ und $\frac{a+b}{2}$:



Betrachte in der Figur rechts nun ein Rechteck statt einem Quadrat.
Haben dann die gebildeten Mondsicheln auch die Fläche des Rechtecks?