Blatt 3 - Funktionen

Wiederholung: Unter einer *Funktion* (Abbildung) $f : A \to B$ für Mengen A, B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$. Dabei ist b das *Bild* von a, bzw. a als *Urbild* von b.
Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subseteq B$ das *Bild* von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a | f(a) \in D\} \subseteq A$ das *Urbild* von D. Die Menge $f(A)$ heißt *Wertebereich/-menge* und A *Definitionsbereich/-menge* von f.

Aufgaben:

1

(a) Gib eine explizite Darstellung der folgenden Funktionen $y = f(x)$ an!

$$(1.)\ 3x + 5y = 10, \qquad (2.)\ 4x^2 - 3y/2 + x = 9$$

(b) Bestimme einen größtmöglichen Definitionsbereich:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{4-x^2}, \qquad g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

(c) Bestimme einen größtmöglichen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich:

$$f(x) = \sqrt{1-|x|}, \qquad g(x) = \left(\sqrt{x-|x|}\right)^{-1}$$

(d) Skizziere die Graphen der Funktionen:

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2 + \sin(x), \quad h(x) = 2\sin(x), \quad k(x) = -\cos(-x)$$

(e) Welche Symmetrien besitzen die Funktionen (bzw. deren Graphen):

$$f(x) = x^9 + 4x^7, \qquad g(x) = \pi|x|, \qquad h(x) = e^{-x}$$

(f) Bestimmen Sie zuerst Definitionsbereich und Wertebereich von f und, sofern vorhanden, die Umkehrfunktion f^{-1}:

$$(1.)\ y = \frac{3}{2}\sqrt{2x+3}, \qquad (2.)\ y = 3^{x-2}, \qquad (3.)\ y = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

2 Modellieren Sie den Tagesgang der Temperatur durch eine Sinusfunktion. Bestimmen Sie die Parameter aus den folgenden Angaben: Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit $25°C$ am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit $3°C$ am kältesten. Schätzen Sie damit die Temperatur um 10:00 Uhr.

3

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Welche Aussagen sind falsch? Erläutern Sie mit einem Beispiel:

(1.) Wenn $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine Extremalstelle von f.

(2.) Wenn x_0 eine Extremalstelle von f, dann ist $f'(x_0) = 0$.

(3.) Wenn $f'(x_0) < 0$, so ist der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein Hochpunkt des Graphen von f.

(b) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem einen Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$

(1.) Zeichnen Sie den Punkt P auf dem Einheitskreis, so dass der zu P gehörende Winkel α zur x-Achse $\sin(\alpha) = 0.6$ erfüllt.

(2.) Begründen sie, dass für $\alpha \in (0, \pi/2)$ ein weiterer Punkt mit dieser Eigenschaft existiert.

(3.) Entnehmen Sie Ihrer Skizze einen Näherungswert für $\cos(\alpha)$ und berechnen diesen Wert.

(4.) Erläutern Sie, dass für alle Winkel α gilt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$

(c) Ist dies eine Aussage und ist sie wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(1.) Eine Polynomfunktion geraden Grades wird nie negativ.

(2.) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

(3.) Quadratische Funktionen haben keine Wendestellen.

(4.) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die reellen Zahlen als Definitionsmenge.

(5.) Alle Funktionen $f(x) = a^x (a > 0)$ sind streng monoton wachsend.

(6.) Die Definitionsmenge der Funktion $f(x) = \sqrt{x + 3}$ sind alle reellen Zahlen, die größer als 3 sind.

Lösungen: 1 (a): (1.) $y = f(x) = 2 - 3x/5$, (2.) $y = f(x) = \frac{8}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 6$, (b): f: $[1, 2) \cup (2, \infty)$, g: $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, (c): f: $D_f = [-1, 1]$, $W_f = [0, 1]$, g: nicht definiert, (d): selber!, (e): f: ungerade (Punktsymmetrie in $(0, 0)$), g: gerade (symmetrisch bzgl. y-Achse), h: nix, (f): (1.) $D_f = [-3/2, \infty)$, $W_f = [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \frac{2}{9}y^2 - \frac{3}{2}$, (2.) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (0, \infty)$, $f^{-1}(y) = 2 + \log_3(y)$, (3.) $D_f = (0, \infty)$, $W_f = [-4, 1)$, $f^{-1}(y) = (\frac{4+y}{1-y})^2$, 2 $14°C$, 3 (a): (1.) Falsch, kann Wendepunkt sein, Bsp. $f(x) = x^3$ in $x = 0$, (2.) Wahr, da Polynome überall differenzierbar, (3.) Falsch, Bsp. $f(x) = -x$, (b): (1.) selber, (2.) gespiegelt, (3.) $\cos(\alpha) = 0.8$ (4.) selber, (c): (1.) falsch, Bsp. $f(x) = x^2 - 2$, (2.) wahr, da ungerade Monome immer positiv und negativ (3.) wahr, (4.) falsch, in $x = 0$ nicht definiert, (5.) falsch, Bsp. $f(x) = 1^x$, (6.) falsch, größer gleich -3