UNIVERSITÄT MANNHEIM

Dr. Peter Parczewski 9. Oktober 2020

Tag der Mathematik 2020: Wettbewerb - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen (m, n) mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1$$

Lösung Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1 \Leftrightarrow m+2n+3 = mn+m \Leftrightarrow 2n+3 = mn$$

Damit folgt

$$2n+3 = mn \Leftrightarrow m = \frac{2n+3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \tag{1}$$

und notwendigerweise $m = 2 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N}$, d.h. n ist Teiler von 3, sowie

$$2n+3 = mn \Leftrightarrow n(2-m) = -3 \Leftrightarrow n = \frac{-3}{2-m} = \frac{3}{m-2}$$

und notwendigerweise auch $m \neq 2$. D.h. es ist nur möglich: $n \in \{1, -1, 3, -3\}$. Setzen wir diese vier Fälle in (1) ein, folgt für $n = -1$: $m = 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$, also keine Lösung. Für die anderen Werte erhalten wir die drei Lösungen

$$(m, n) \in \{(5, 1), (3, 3), (1, -3)\}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

12 Regierungschefs treffen sich zu einem Gespräch an einem runden Tisch mit verschiedenfarbigen Sitzen, darunter Merkel, Macron und Kurz. Zwischen Merkel und Macron sitzt höchstest eine andere Person. Zwischen Merkel und Kurz, sowie zwischen Macron und Kurz, sitzen jeweils mindestens 2 andere Personen.

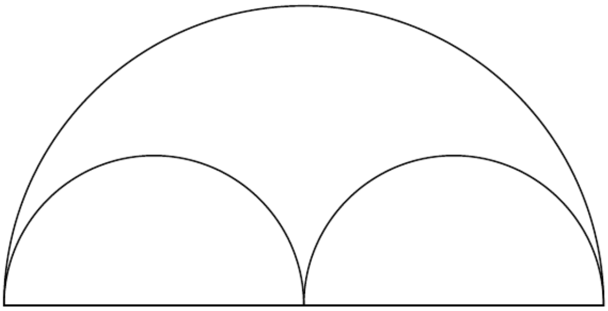
Wie viele solche Sitzverteilungen gibt es?

Hinweis: Verwenden Sie gerne die Kurzschreibweise $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$

Lösung Nummerieren wir die Sitze mit 1 bis 12 und betrachten zuerst den Fall, dass Merkel auf Platz 1 sitzt. Dann sind die einzigen möglichen Plätze für Macron: $11, 12, 2, 3$. Sitzt Macron auf Platz 2, so sind dann die möglichen Plätze für Kurz: 5 bis 10 (damit der Mindestabstand zu Merkel und Macron gewahrt bleibt). Das sind also 6 Möglichkeiten. Analog kann Kurz bei Macron auf 3 nur auf den Plätzen 6 bis 10 sitzen. Das sind 5 Möglichkeiten. Analog argumentiert (Symmetrie), erhalten wir insgesamt 11 Möglichkeiten, wenn Macron auf den Plätzen 11 oder 12 sitzt. Also sind es insgesamt 22 Möglichkeiten, wenn Merkel auf Platz 1 sitzt. Die anderen Teilnehmer können beliebig verteilt werden $(9!)$. Somit gibt es insgesamt $22 \cdot 12 \cdot 9! = (220 + 44) \cdot 9! = 264 \cdot 9!$ $(= 264 \cdot 362880 = 95800320)$ Sitzverteilungen.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

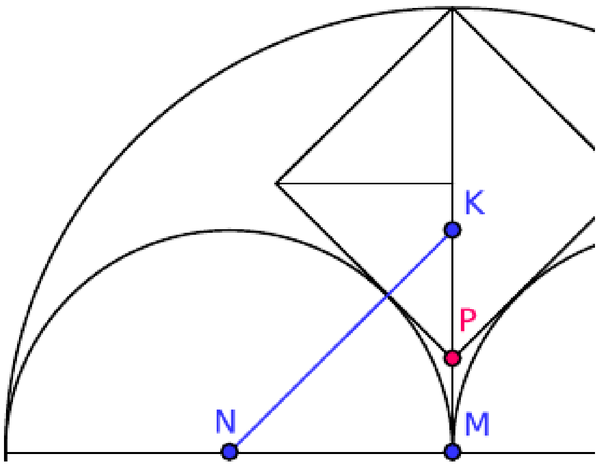
Gegeben seien ein Halbkreis mit Radius 1 und darin zwei Halbkreise mit Radius 1/2:



In die nun verbliebene Fläche des Halbkreises soll ein Quadrat gezeichnet werden. Bestimme die Seitenlänge eines solchen maximalen Quadrates?

Hinweis: Die Lösung wird als $x\sqrt{2}+y$ mit Dezimalzahlen x, y eingegeben

Lösung Das maximale Quadrat kann die Diagonale nur auf dem Radius des großen Halbkreises in der Mitte besitzen. Der Winkel zu diesem Radius ist also 45° und wir erhalten einige rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke mit den spitzen Winkeln 45°:



Sei NK die Senkrechte von N auf die Seite des Quadrates, so ist als Diagonale im Quadrat der Seite $\overline{NM} = 1/2$ also $\overline{NK} = \sqrt{2}/2$ und daher als eine weitere Diagonale eines Quadrates $\overline{PK} = \sqrt{2} \cdot (\overline{NK} - 1/2) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}/2 - 1/2) = 1 - \sqrt{2}/2$. Somit ist

$$\overline{MP} = \overline{MK} - \overline{PK} = 1/2 - (1 - \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2 - 1/2$$

und wir erhalten die Länge der Diagonale des maximalen Quadrates als

$$1 - \overline{MP} = 1 - (\sqrt{2}/2 - 1/2) = 3/2 - \sqrt{2}/2$$

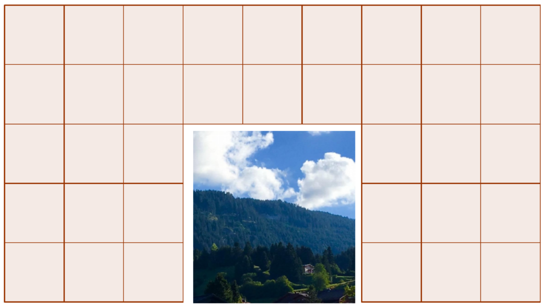
Die Seitenlänge des maximalen Quadrates ist daher

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (3/2 - \sqrt{2}/2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (3/2 - \sqrt{2}/2) = 3/4\sqrt{2} - 1/2 = (0.75) \cdot \sqrt{2} - 0.5 \approx 0.56$$

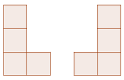
Ein Quadrat parallel zum Seite NM hat immerhin gar eine maximale Seitenlänge < 0.53 (dafür benötigt man aber schon etwas Analysis oder Numerik - Details bei Interesse in Mathe-AG!)

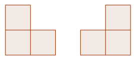
Aufgabe 4 (5 Punkte)

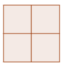
Gegeben sei eine Badezimmerwand um einen Spiegel (leere Fläche), die noch gefliest werden muss:
Mit jeweils welchem Set von Fliesen kann diese Fläche vollständig (ohne Überdeckung oder Zerlegung von Fliesen) abgedeckt werden?

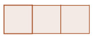


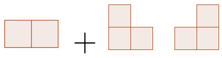
A 

C 

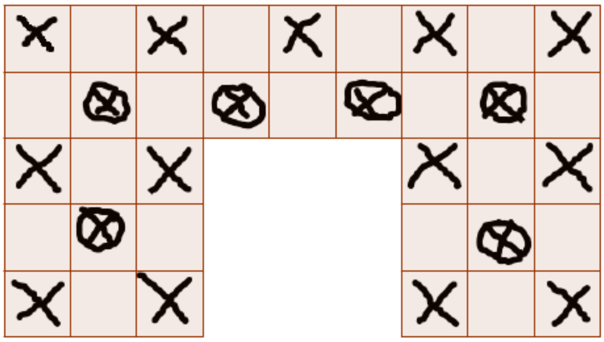
E 

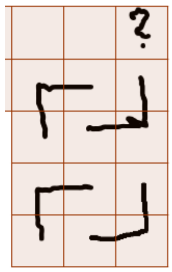
B 

D 

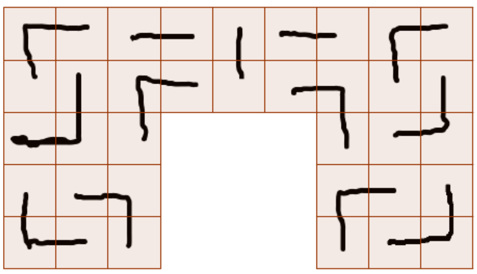
F 

Lösung Nur die Sets von Fliesen D und F sind korrekt. Wir verwenden diese Muster der Wand mittels Schachbrettmuster (alle Färbungen) und einem ausgedünnten Schachbrettmuster (nur die großen Kreuze ohne Kreis) unten links:



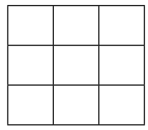


- Fliesen A und B und C belegen von dem Schachbrettmuster jeweils gleich viele schwarze und weiße Felder. Aber die Wand hat 19 schwarze und 17 weiße Felder. Also können A oder B oder C nicht die Wand fliesen.
- Fliesen E können die kurze Wand unten (3 Kacheln) nur auf diese Weise belegen wie oben rechts, und dann entsteht stets eine Lücke, die mit diesen Fliesen nicht belegt werden kann, vgl. unten.
- Fliesen D können die Wand belegen (alle waagrecht).
- Fliesen F können die Wand belegen, siehe unten.



Aufgabe 5 (4 Punkte)

Auf einem Grundstück der Form unten werden Stromleitungen gelegt. In jedem Quadrat entweder nur Richtung Nord- Süd (d.h. senkrecht) oder nur Richtung Ost-West (d.h. waagrecht). Eine Verbindung gegenüberliegender Seiten (von Nord und Süd bzw. Ost und West) besteht also wenn drei senkrechte Leitungen verbunden oder wenn drei waagrechte Leitungen verbunden sind. Bestimme jeweils:



A Die Anzahl der Bebauungen mit mindestens einer Verbindung gegenüberliegender Seiten

B Bei einer ganz zufälligen Bebauung die durchschnittliche Anzahl der Verbindungen gegenüberliegender Seiten

Hinweis: $2^9 = 8^3 = 512$, $7^3 = 343$

Lösung Es gibt insgesamt $2^{3\times 3} = 2^9 = 512$ mögliche Bebauungen. Nun gibt es 6 mögliche Pfade für eine Verbindung (je 3 senkrecht und 3 waagrecht). Auf jedem solchen Pfad ist die Wahrscheinlichkeit für eine Verbindung genau $(1/2)^3 = \frac{1}{8}$. Bezeichnen wir die Zufallsvariablen X und Y für die Anzahl der Verbindungen senkrecht und waagrecht. Offenbar sind sie zwar identisch verteilt aber nicht unabhängig und es gilt wegen der Unabhängigkeit der vier senkrechten bzw. waagrechten Pfade:

$$\mathbb{P}[X=0] = \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \mathbb{P}[Y=0] \;\Leftrightarrow \mathbb{P}[X>0] = \mathbb{P}[Y>0] = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3$$

Da es nie zugleich Verbindungen sowohl senkrecht und waagrecht geben kann, ist:

$$\mathbb{P}[X>0, Y>0] = 0$$

Daher ist wegen $X, Y \geq 0$ auch

$$\mathbb{P}[Y>0] = \mathbb{P}[Y>0, X\geq 0] = \mathbb{P}[Y>0, X=0] + \mathbb{P}[Y>0, X>0] = \mathbb{P}[Y>0, X=0]$$

Somit folgt mit Symmetrie $\mathbb{P}[Y>0, X=0] = \mathbb{P}[X>0, Y=0] = \mathbb{P}[X>0] = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3$

A Nun erhalten wir für das Ereignis von mindestens einer Verbindung:

$$\mathbb{P}[X+Y>0] = \mathbb{P}[X>0, Y\geq 0] + \mathbb{P}[X=0, Y>0] = 2\mathbb{P}[X>0] = 2\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3\right)$$

Also gibt es wegen $2^9 = 8^3$ möglichen Bebauungen genau

$$2\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3\right)\cdot 8^3 = 2\frac{8^3 - 7^3}{8^3}8^3 = 2(512 - 343) = 338$$

Bebauungen mit mindestens einer Verbindung.

B Gesucht ist der Erwartungswert, der mit Linearität sich sofort vereinfacht:

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2\mathbb{E}[X]$$

Nun folgt für die einzelnen senkrechten Pfade jeweils der Erwartungswert $\frac{1}{8}$, also insgesamt $\mathbb{E}[X+Y] = 2\cdot 3\cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$.

(Analog ist bei einer Baugrund mit $n\times n$ Quadraten die durchschnittliche Anzahl von Verbindungen:

$$2\cdot n\cdot (1/2)^n$$

- bei Interesse mehr in Mathe-AG)