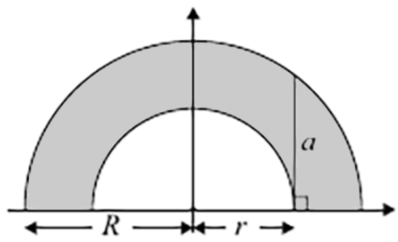
2. Tag der Mathematik Mannheim

Mathematischer Wettbewerb

Aufgabe 1 (1+2=3 Punkte)

(i) Bestimme für die graue Fläche in der Abbildung den Flächeninhalt mittels den Radien R und r.

(ii) Zeige, dass die graue Fläche auch nur mittels a berechnet werden kann.



(wobei $0 < r < R$)

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Auf einer seltsamen Insel leben nur Pianisten und Violinisten. Jede Pianistin und jeder Violinist sagen stets die Wahrheit und jede Violinistin und jeder Pianist sagen stets die Unwahrheit.

(i) Du landest auf der Insel und triffst eine Frau und einen Mann, die sagen:

Frau: *Wir sind beide Pianisten*

Mann: *Das ist wahr*

Ist die Frau eine Pianistin oder Violinistin? Und welches Instrument spielt der Mann?

(ii) Bei einer zweiten Ankunft auf der Insel triffst du erneut zwei Personen, die sagen:

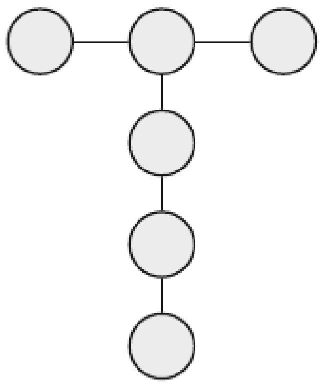
Frau: *Wir spielen beide das gleiche Instrument*

Mann: *Diese Frau ist eine Pianistin*

Welche Instrumente spielen diese beiden Personen?

Aufgabe 3 (1+2+2=5 Punkte)

Anna möchte sechs aufeinanderfolgende Zahlen in die Kreise einsetzen, sodass der Summenwert der Zahlen, die auf einer Linie liegen, jeweils gleich ist.



(i) Zeige: Für die Zahlen 2 bis 7 gibt es eine Lösung.

(ii) Finde fünf weitere Lösungen für andere sechs aufeinanderfolgende Zahlen.

(iii) Beweise, dass es keine anderen Lösungen als die obig gefundenen geben kann.

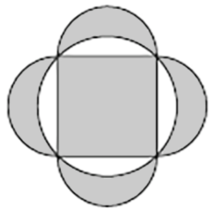
Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweise oder widerlege: Erfüllen drei natürliche Zahlen a, b, c die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

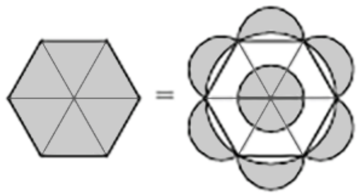
so ist mindestens eine dieser Zahlen durch 3 teilbar.

Aufgabe 5 (3+3=6 Punkte)



(i) Zeige in der oberen Figur, dass die Fläche des Quadrates der Fläche der vier 'Monde' entspricht. (Eine Begründung ohne Rechnungen ist möglich!)

(ii) Zeige nun (ebenso ohne Rechnungen!) die Gleichheit der beiden grauen Flächen in der unteren Abbildung.



Aufgabe 6 (1.5+1.5+3 =6 Punkte)

Sieben Politiker (darunter Merkel und Seehofer) setzen sich zufällig an einen runden Tisch.

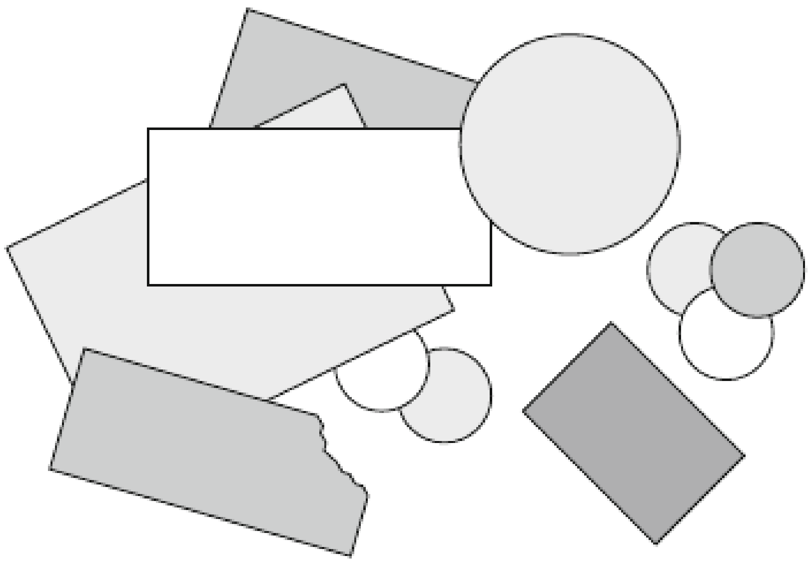
(i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Merkel neben Seehofer sitzen muss?

(ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen Merkel und Seehofer mindestens eine Person als Puffer sitzt?

(iii) Die anderen fünf Politiker verlassen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ die Diskussion früher und die restlichen Teilnehmer rücken zusammen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss Merkel nun am Ende neben Seehofer sitzen?

Aufgabe 7 (4+1+1=6 Punkte)

Fünf Rechtecke (eine Ecke wurde abgebissen) und sechs Kreissscheiben wurden zufällig auf einen Tisch geworfen. Jeder Eckpunkt eines Rechtecks und jeder Ort, an dem sich Kanten treffen, kennzeichne einen Punkt:



(i) Finde vier verschiedene Menge von jeweils vier Punkten, die auf einem Kreis liegen, und zeichne ihn jeweils ein. Skizzierter Kreis ohne Zirkel genügt, weit wichtiger sind die Begründungen!

(ii) Wieviele neue Lösungen entstehen, wenn das Rechteck links unten nicht angebissen ist?

(iii) Zeichne eine Kreisscheibe in den Hintergrund, sodass genau zwei weitere Lösungen entstehen.

Aufgaben für Teams ab der 11. Klasse

(Für Teams bis zur 10. Klasse gehen diese bei Bearbeitung als Zusatzpunkte in die Wertung ein)

Aufgabe A (3 Punkte)

Beweise oder widerlege:
Es gibt natürliche Zahlen $m > n > 1$, so dass die Differenz der Zahlen $2^{(2^m)}$ und $2^{(2^n)}$ nicht durch 10 teilbar ist.

Aufgabe B (3+2=5 Punkte)

Zwei Bäume (der gleichen Höhe) brechen bei einem Sturm an jeweils einer zufälligen Stelle ab.

(i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den zwei Bäumen danach einer mindestens doppelt so hoch wie der andere ist?

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den beiden Bäumen danach einer mindestens fünffach so hoch wie der andere ist?

(ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass von drei (gleich hohen) Bäumen nach einem Sturm zwei mindestens fünffach so hoch sind wie der kleinste?