Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling 03.02.2020

Lösungen der 2. Klausur zur Linearen Algebra I im HWS 2019

1. *(1+1+1+1+2+1+2=9 Punkte)*

   (a) $|S_n| = n!$.

   (b) Sie heißt linear unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt

   $$\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_j = 0 \text{ für alle } j \in J.$$

   (c) Dann ist $k \leq n$, und es gibt lauter verschiedene Indices $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$, so daß man nach Austauschen von $v_{i_1}, ..., v_{i_k}$ gegen $w_1, ..., w_k$ wieder eine Basis von V erhält.

   (d) Eine Vandermonde-Matrix A und ihre Determinante $\det A$ haben die folgende Gestalt. Hier sind $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \det A = \sum_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i).$$

   (e)

   $$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) &= (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v, \\ 1_K \cdot v &= v, \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v &= \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v, \\ \lambda \cdot (v_1 + v_2) &= \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2. \end{aligned}$$

   (f)

   $$|\phi(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{für} \quad x, y \in V.$$

   (g)

   $$\begin{aligned} d(x,y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = y, \\ d(x,y) \quad &= \quad d(y,x), \\ d(x,z) \quad &\leq \quad d(x,y) + d(y,z) \quad \text{(Dreiecksungleichung)}. \end{aligned}$$

2. *(2+1+1+1=5 Punkte)*

(a) $\alpha = (1\ 3)(2\ 4\ 6\ 5\ 7\ 8), \quad \beta = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$.

(b)

1	2	4	5	7	8
1	5	7	2	4	8

(c)

j	0	1	2	3	4	5	6
2^j	1	2	4	8	7	5	1
4^j	1	4	7	1	4	7	1

(d)

$$\frac{20}{3+2i} = \frac{20(3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{60}{13} - \frac{40}{13}i, \quad \Re(z) = \frac{60}{13},\ \Im(z) = -\frac{40}{13}.$$

3. *(5 Punkte)* (Die Angabe der Zeilenumformungen war nicht verlangt.)

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$Z_{II}(1;1,3) \circ Z_{II}(2;1,2): \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_{II}(1;2,1): \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_{II}(2;3,2) \circ Z_{II}(2;3,1): \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$y_{inh} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Lös}(A,0) = \mathbb{F}_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. *(2+2=4 Punkte)*

(a)

$$\begin{aligned}\det A &= \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 9 & 10 & 5 & 6\\ 11 & 12 & 7 & 8\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\\ &= (4-6)(40-42) = (-2)(-2) = 4.\end{aligned}$$

$\det B$ kann man zum Beispiel mit Sarrus ausrechnen, oder man kann die Matrix mit Zeilenumformungen vereinfachen,

$$\begin{aligned}\det B &= 0\cdot 4\cdot 10 + 1\cdot 5\cdot 6 + 3\cdot 7\cdot 2 - 0\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 3\cdot 10 - 6\cdot 4\cdot 2\\ &= 0 + 30 + 42 - 0 - 30 - 48 = -6,\\ \det B &= \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\\ 6 & 6 & 8\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix} = 2(-3) = -6.\end{aligned}$$

(b) Der Vektor

$$v := \begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}$$

ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, denn

$$A\cdot v = \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\\ -p_0\cdot 1 - p_1\cdot\lambda - \ldots - p_{n-1}\lambda^{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\\ \lambda^n\end{pmatrix} = \lambda\cdot v.$$

5. *(2+3 Punkte)*

(a) $\cos\alpha_{ij} = \frac{\phi(a_i,a_j)}{\|a_i\|\cdot\|a_j\|}$.

$\|a_1\|$	$\|a_2\|$	$\|a_3\|$	$\cos\alpha_{12}$	$\cos\alpha_{13}$	$\cos\alpha_{23}$	α_{12}	α_{13}	α_{23}
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

(b)

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = (1,1,0), \quad \|b_1\|^2 = 2, \\
b_2 &= a_2 - \frac{\phi(a_2,b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,1,2), \quad \|b_2\|^2 = \frac{3}{2}, \\
b_3 &= a_3 - \frac{\phi(a_3,b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{\phi(a_3,b_2)}{\|b_2\|^2} b_2 = (-1,0,0) - \frac{-1}{2}(1,1,0) \\
&- \frac{1/2}{3/2} \cdot \frac{1}{2}(-1,1,2) = \frac{1}{3}(-1,1,-1), \quad \|b_3\|^2 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \; c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2), \; c_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1).$$

6. *(1+3=4 Punkte)*

(a)

$$M(\mathcal{C},h,\mathcal{C}) = M(\mathcal{B},\mathcal{C})^{-1} \cdot M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B},\mathcal{C}).$$

(b)

$$\begin{aligned}
M(\mathcal{B}, g\circ h, \mathcal{B}) &= M(\mathcal{B},g,\mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \cdot M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}), \\
M(\mathcal{B}, h\circ g, \mathcal{B}) &= M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B},g,\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B},\mathcal{C}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g\circ h = h \circ g \\
\iff\; & M(\mathcal{B}, g\circ h, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, h\circ g, \mathcal{B}) \\
\iff\; & M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \cdot M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \\
\iff\; & M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},\mathcal{C})^{-1} \cdot M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \\
\iff\; & M(\mathcal{B},h,\mathcal{B}) = M(\mathcal{C},h,\mathcal{C}).
\end{aligned}$$

7. *(4 Punkte)*

(1) Für jedes $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist $h^j \in \{g \in \mathrm{End}\,(V) \,|\, g\circ h = h\circ g\}$, denn $h^j \circ h = h^{j+1} = h \circ h^j$.

(2) $\mathrm{id}\,, h, h^2, ..., h^{n-1}$ sind linear unabhängig: Seien $\mu_0, ..., \mu_{n-1} \in K$ mit $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \cdot h^i = 0$. Dann $0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \cdot h^i\right)(v_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \cdot h^i(v_0)$. Weil $(v_0, h(v_0), h^2(v_0), ..., h^{n-1}(v_0))$ eine Basis von V ist, sind alle $\mu_i = 0$.

(3) $(\mathrm{id}\,, h, h^2, ..., h^{n-1})$ ist ein Erzeugendensystem von $\{g \in \mathrm{End}\,(V) \,|\, g\circ h = h\circ g\}$: Sei $g \in \mathrm{End}\,(V)$ mit $g\circ h = h \circ g$. Weil $(v_0, h(v_0), h^2(v_0), ..., h^{n-1}(v_0))$ eine Basis von V ist, gibt es eindeutige Koeffizienten $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in K$ mit $g(v_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot h^i(v_0)$. Es ist wegen $g\circ h = h\circ g$

$$\left(g - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot h^i\right)(h^j(v_0)) = h^j\Big(\left(g - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot h^i\right)(v_0)\Big) = h^j(0) = 0.$$

Daher ist $\left(g - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot h^i\right)(v) = 0$ für alle $v \in V$. Daraus folgt $g = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot h^i$.