Aufgabe 1 (1+1+1+1+1+1+1+1+1=9 Punkte) erhaltene Punkte:

Sei K ein Körper, seien $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, und $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Schreiben Sie die Formel hin, die $\dim V$ und $\dim \ker(f)$ und $\dim f(V)$ verbindet.

(b) Wann heißt eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ eines K-Vektorraums V *linear unabhängig*?

(c) $f : V \to V$ sei ein Endomorphismus eines K-Vektorraums mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V, mit Basiswechselmatrix $C := M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in GL(n, K)$. Weiter seien $A := M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A})$ und $B := M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$. Schreiben Sie die Formel hin, die A und B mit Hilfe von C verbindet.

(d) Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann ist $\text{rang}(A) \in \{0, 1, ..., \min(m, n)\}$. Schreiben Sie die Formel für die Dimension $\dim \text{Lös}(A, 0)$ des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ hin.

(e) (Dieser Punkt steht so nicht in der Vorlesung.) Ersetzen Sie die Pünktchen auf der rechten Seite der folgenden Äquivalenz durch etwas sinnvolles, so dass die Äquivalenz wahr wird. Sei $A \in M(m \times n, K)$.

$$\exists\, b \in M(m \times 1, K) - \{0\} \text{ und } \exists\, c \in M(1 \times n, K) - \{0\} \text{ mit } A = b \cdot c$$
$$\iff \text{rang}(A) \; .... \; .$$

(f) Sei $A \in M(n \times n, K)$. Schreiben Sie die Leibnizformel für die Determinante $\det A$ von A hin.

(g) Sei $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar. Sei $B = (v_1, ..., v_n) \in GL(n, K)$ eine Matrix aus Eigenvektoren $v_1, ..., v_n \in M(n \times 1, K)$ von A mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, so dass $v_1, ..., v_n$ zugleich eine Basis von $M(n \times n, K)$ sind. Schreiben Sie die Eigenvektorgleichungen $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$ in eine Matrizengleichung.

(h) Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$ mit $ad - bc \neq 0$. Diese Matrix ist invertierbar. Geben Sie eine Formel für die inverse Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ an.

(i) (*Cramersche Regel, allgemeiner Fall*) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $A \in M(n \times n, R)$, und sei $b \in M(n \times 1, R)$. Die Gleichung $A \cdot x = \det A \cdot b$ hat wegen $A \cdot A^\sharp = \det A \cdot E_n$ die Lösung $c = A^\sharp \cdot b \in M(n \times 1, R)$. Wie kann man die Einträge c_i von c als Determinanten schreiben? (Nur die Formel ist gefragt, kein Beweis.)

.

Aufgabe 2 (2+1+1+1=5 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Schreiben Sie die Permutationen

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 3 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in S_8 \quad \text{und} \\ \beta &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2) \in S_5 \end{aligned}$$

als Produkte zyklischer Permutationen mit disjunkten Trägern.

(b) Die obere Zeile der folgenden Tabelle zeigt die Elemente ungleich 0 des Körpers $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$ (mit den Verknüpfungen $+_{11}$ und $\cdot_{11}$). Schreiben Sie in die untere Zeile die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(c) Schreiben Sie in die untere Zeile der folgenden Tabelle die Potenzen $3^j \in \mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$ für $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. ($\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$ enthält nur die Zahlen 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Wir möchten hier keine anderen Zahlen sehen.)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^j											

(d) Bestimmen Sie das (eindeutige) $\alpha \in [0, 1[$ mit $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019} = e^{2\pi i\alpha}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_3)$$

ist invertierbar. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, indem Sie A und E_3 nebeneinander schreiben und simultan geeignete Zeilenumformungen durchführen. Schreiben Sie nach maximal 2 Zeilenumformungen die jeweils erhaltenen Matrizen hin. Notieren Sie auch, welche Zeilenumformungen Sie wann benutzen. ($\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}_3$ enthält nur die Zahlen 0,1,2. Wir möchten hier keine anderen Zahlen sehen.)

Aufgabe 4 (4 Punkte) erhaltene Punkte:

Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ hat 3 verschiedene Eigenwerte, die übrigens alle ganzzahlig sind. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

Aufgabe 5 (2+3=5 Punkte) erhaltene Punkte:

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ϕ. Die Vektoren

$$a_1 := (1, -1, 0), \quad a_2 := (0, 1, -1), \quad a_3 := (0, 0, 1)$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Der Winkel zwischen a_i und a_j für $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ sei α_{ij}. Geben Sie die Formel an, die $\cos \alpha_{ij}$ mit dem Skalarprodukt und den Normen von a_i und a_j ausdrückt:

$$\cos \alpha_{ij} =$$

Schreiben Sie in die folgende Tabelle die Werte rein.

$\|a_1\|$	$\|a_2\|$	$\|a_3\|$	$\cos \alpha_{12}$	$\cos \alpha_{13}$	$\cos \alpha_{23}$	α_{12}	α_{13}	α_{23}

(b) Wenden Sie auf diese Basis das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an. Nennen Sie die erhaltene Orthogonalbasis (b_1, b_2, b_3). Normieren Sie sie zu einer ON-Basis (c_1, c_2, c_3). Schreiben Sie alle Rechnungen und die Basen (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2, c_3) auf.

Aufgabe 6 (1+2+1=4 Punkte) erhaltene Punkte:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A^{(n)} = (a_{ij}^{(n)}) \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ die folgende Matrix,

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \\ -1 & \text{falls } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{falls } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\det A^{(1)}$ und $\det A^{(2)}$.

(b) Finden und beweisen Sie mit Laplace-Entwicklung eine Formel, die $\det A^{(n)}$ für $n \geq 3$ als Linearkombination von $\det A^{(n-1)}$ und $\det A^{(n-2)}$ ausdrückt.

(c) Bestimmen Sie induktiv alle Werte $\det A^{(n)}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte) erhaltene Punkte:

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Laut Spektralsatz für symmetrische reelle Matrizen gibt es eine ON-Basis $(v_1, ..., v_n)$ von $M(n \times 1, \mathbb{R})$ (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $M(n \times 1, \mathbb{R})$), die aus Eigenvektoren v_i von A mit gewissen Eigenwerten $\lambda_i \in \mathbb{R}$ besteht. Die Matrizen $v_i v_i^{tr} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sind auch symmetrisch.

Behauptung: *A ist eine Linearkombination $\sum_{i=1}^n \kappa_i \cdot v_i v_i^{tr}$ dieser Matrizen.*

Finden Sie die Koeffizienten $\kappa_i \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie die Behauptung mit diesen Koeffizienten.