Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling 20.12.2019

# Lösungen der 1. Klausur zur Linearen Algebra I im HWS 2019

1. *(1+1+1+1+1+1+1+1+1=9 Punkte)*

   (a)
$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim f(V).$$

   (b) Sie heißt linear unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt
$$\sum_{j \in J} \lambda_j v_j = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_j = 0 \text{ für alle } j \in J.$$

   (c)
$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

   (d)
$$\dim \text{Lös}(A, 0) = n - \text{rang}(A).$$

   (e)
$$\ldots \iff \text{rang}(A) = 1.$$

   (f)
$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

   (g)
$$A \cdot B = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

   (h)
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   (i) Sei $C_i$ die Matrix, die man erhält, indem man die $i$-te Spalte von $A$ durch $b$ ersetzt. Dann ist $c_i = \det C_i$.

2. *(2+1+1+1=5 Punkte)*

   (a) $\alpha = (1\ 5)(2\ 4\ 3\ 8\ 7)$ oder $\alpha = (1\ 5)(2\ 4\ 3\ 8\ 7)(6)$, $\quad \beta = (4\ 5)$.

   (b)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 4 | 3 | 9 | 2 | 8 | 7 | 5 | 10 |

(c)

| $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^j$ | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 |

(d) $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019} = (e^{2\pi i1/6})^{2019} = (e^{2\pi i1/6})^3 = e^{2\pi i1/2}$, also $\alpha = \frac{1}{2}$.

3. *(5 Punkte)*

$$
\begin{aligned}
A := & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \\
Z_{III}(2;3) \circ Z_{III}(1;2) : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Z_{II}(1;1,3) : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
Z_{II}(1;3,2) \circ Z_{II}(2;3,1) : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
Z_{II}(1;2,1) : & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}
\end{aligned}
$$

4. *(4 Punkte)*

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-5 & 0 & 0 \\ 1 & t-3 & 1 \\ 0 & 1 & t-3 \end{pmatrix} = (t-5)((t-3)^2 - 1) = (t-5)(t-2)(t-4).$$

Die Eigenwerte von $A$ sind 5, 2 und 4. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ ist eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E_3) \cdot x = 0$. Im folgenden bezeichnet " $\sim$ " Zeilenumformungen.

Zum Eigenwert 5:

$$A - 5 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 2:

$$A - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 4:

$$A - 4 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. *(2+3 Punkte)*

   (a) $\cos \alpha_{ij} = \frac{\phi(a_i, a_j)}{\|a_i\| \cdot \|a_j\|}$.

| $\|a_1\|$ | $\|a_2\|$ | $\|a_3\|$ | $\cos \alpha_{12}$ | $\cos \alpha_{13}$ | $\cos \alpha_{23}$ | $\alpha_{12}$ | $\alpha_{13}$ | $\alpha_{23}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 1 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ |

   (b)

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = (1, -1, 0), \quad \|b_1\|^2 = 2, \\ b_2 &= a_2 - \frac{\phi(a_2, b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 = (0, 1, -1) - \frac{-1}{2}(1, -1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, -2), \quad \|b_2\|^2 = \frac{3}{2}, \\ b_3 &= a_3 - \frac{\phi(a_3, b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{\phi(a_3, b_2)}{\|b_2\|^2} b_2 = (0, 0, 1) - \frac{0}{2} b_1 - \frac{-1}{3/2} \cdot \frac{1}{2}(1, 1, -2) \\ &= (0, 0, 1) + \frac{1}{3}(1, 1 - 2) = \frac{1}{3}(1, 1, 1), \quad \|b_3\|^2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \; c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \; c_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

6. *(1+2+1=4 Punkte)*

$$\det A^{(1)} = 2, \quad \det A^{(2)} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3.$$

Sei nun $n \geq 3$. In der folgenden Gleichungskette wird in $\overset{(1)}{=}$ Laplace-Entwicklung nach der 1. Spalte benutzt, und in $\overset{(2)}{=}$ Laplace-Entwicklung nach der 1. Zeile.

$$\begin{aligned} \det A^{(n)} &\overset{(1)}{=} 2 \cdot \det A^{(n-1)} - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\overset{(2)}{=} 2 \cdot A^{(n-1)} - \det A^{(n-2)}. \end{aligned}$$

Induktiv folgt $\det A^{(n)} = n + 1$: $\quad \det A^{(1)} = 2$, $\det A^{(2)} = 3$,

$$\det A^{(n)} = 2 \cdot \det A^{(n-1)} - \det A^{(n-2)} = 2 \cdot n - (n - 1) = n + 1.$$

7. *(4 Punkte)*

Die Behauptung gilt mit $\kappa_i = \lambda_i$.

1. Beweis: $A \cdot v_j = \lambda_j v_j$ und

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^{tr}\right) \cdot v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \cdot v_i^{tr} v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \cdot \delta_{ij} = \lambda_j v_j,$$

also

$$\begin{aligned} & \left(A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^{tr}\right) \cdot v_j = 0, \\ \text{also} \quad & \left(A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^{tr}\right) \cdot B = 0 \quad \text{für} \quad B = (v_1 \cdots v_n) \in GL(n, \mathbb{R}), \\ \text{also} \quad & A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^{tr} = 0. \end{aligned}$$

2. Beweis: Die Matrix $T := (v_1 \cdots v_n) \in GL(n, \mathbb{R})$ ist orthogonal (d.h. sie erfüllt $T^{tr} = T^{-1}$) und erfüllt

$$T^{tr} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A &= T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{tr} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot T \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} T^{tr} \quad \text{(1 an der Stelle } (i,i)\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i v_i^{tr}. \end{aligned}$$