Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Khadija Larabi 19.10.2019

Probeklausur zur Linearen Algebra I im HWS 2019

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 32 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 7 Aufgaben, mit 6, 4, 4, 4, 4, 5 und 5 Punkten. Die Aufgaben sind verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass wir sehen können, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher noch Taschenrechner noch Smartphones etc. verwendet werden.
Das bunte nicht geheftete Papier ist für Zwischenrechnungen, die Sie nicht abgeben wollen.

Bitte schreiben Sie auf dieses Deckblatt Ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Klausuren ohne diese Angaben können wir keine Punkte vergeben!
Falls Sie an einer Übungsgruppe teilnehmen, geben Sie möglichst bitte auch ihre Nummer an.

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:
Nummer der Übungsgruppe (oder Tag und Zeit):

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

Aufgabe 1 (1+2+1+1+1=6 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Definieren Sie den Begriff *Körper*. Die Begriffe *Gruppe*, *abelsche Gruppe* und *Ring* können Sie voraussetzen.

(b) Definieren Sie den Begriff K-*Vektorraum*. Hier ist K ein Körper. Die Begriffe *Gruppe*, *abelsche Gruppe*, *Ring* und *Körper* können Sie voraussetzen.

(c) Formulieren Sie den *Austauschsatz von Steinitz*.

(d) Sei K ein Körper und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$ mit $ad - bc \neq 0$. Diese Matrix ist invertierbar.

Geben Sie eine Formel für die inverse Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ an.

(e) Sei $f : V \to W$ eine Abbildung von einem K-Vektorraum V in einen K-Vektorraum W. Geben Sie die Bedingungen an, die f erfüllen muss, um eine *lineare Abbildung* zu sein (d.h. ein *Vektorraum-Homomorphismus*).

.

Aufgabe 2 (1+1+2=4 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) $\varphi_1, ..., \varphi_k \in S_n$ (für ein $n \geq 2$) seien zyklische Permutationen der Längen $a_1, ..., a_k \geq 2$. Geben Sie das Signum $\text{sign}(\sigma)$ des Produktes $\sigma = \varphi_1 \circ ... \circ \varphi_k$ an.

(b) Schreiben Sie die Permutationen

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_8 \quad \text{und} \quad \beta = (4\ 5)(5\ 2\ 3)(1\ 6\ 7\ 5) \in S_7$$

als Produkte zyklischer Permutationen mit disjunkten Trägern.

Aufgabe 3 (3+1=4 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Die obere Zeile der folgenden Tabelle zeigt die Elemente ungleich 0 des Körpers $\mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}_{13}$ (mit den Verknüpfungen $+_{13}$ und $\cdot_{13}$). Schreiben Sie in die untere Zeile die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(b) Schreiben Sie in die untere Zeile der folgenden Tabelle die Potenzen $2^j \in \mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$ für $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. ($\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$ enthält nur die Zahlen 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Wir möchten hier keine anderen Zahlen sehen.)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^j											

Aufgabe 4 (1,5+1,5+1=4 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Geben Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag der folgenden beiden komplexen Zahlen an.

$$z_1 := \frac{2-i}{2+i}, \quad z_2 := (e^{2\pi i 1/6})^{200}.$$

(b) Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$ mit $ad - bc = 1$. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) = y \neq 0$ und mit $cz + d \neq 0$. Bestimmen Sie (mit Rechnung) eine Formel für $\mathrm{Im}(\frac{az+b}{cz+d})$, die nur y und $|cz+d|$ (und Symbole für die Grundrechenarten) enthält.

Aufgabe 5 (4 Punkte) erhaltene Punkte:

Bringen Sie die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{F}_5)$$

in Zeilenstufenform und geben Sie Ihren Zeilenrang an. Schreiben Sie nach jeder Zeilenumformung die jeweils erhaltene Matrix hin. Notieren Sie auch, welche Zeilenumformungen Sie wann benutzen. ($\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_5$ enthält nur die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4$. Wir möchten hier keine anderen Zahlen sehen.)

Aufgabe 6 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$
ist invertierbar. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, indem Sie A und E_3 nebeneinander schreiben und simultan geeignete Zeilenumformungen durchführen. Schreiben Sie nach maximal 2 Zeilenumformungen die jeweils erhaltenen Matrizen hin. Notieren Sie auch, welche Zeilenumformungen Sie wann benutzen.

Aufgabe 7 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

K sei ein Körper, V sei ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, W sei ein K-Vektorraum, und $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Dann sind $\ker(f) \subset V$ und $f(V) \subset W$ endlich-dimensionale Vektorräume (das brauchen Sie nicht zu zeigen), und man definiert $\operatorname{rang}(f) := \dim_K f(V)$.
Beweisen Sie die Formel

$$\dim_K V = \dim \ker(f) + \operatorname{rang}(f).$$