Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Khadija Larabi 19.10.2019

Lösungen der Probeklausur zur Linearen Algebra I im HWS 2019

1. *(1+2+1+1+1=6 Punkte)*

   (a) Ein Körper $(K,+,\cdot)$ ist ein Ring, bei dem $K-\{0\}\neq\emptyset$ ist und $(K-\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

   (b) Ein K-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V,+)$ zusammen mit einer Abbildung
   $$\cdot : K\times V\to V,\quad (\lambda,v)\mapsto \lambda\cdot v,$$
   mit folgenden Eigenschaften:
   (i) ein Distributivgesetz: $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$ für $\lambda,\mu\in K$, $v\in V$;
   (ii) ein anderes Distributivgesetz: $\lambda\cdot(v+w)=\lambda\cdot v+\lambda\cdot w$ für $\lambda\in K$, $v,w\in V$;
   (iii) ein Assoziativgesetz: $\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$ für $\lambda,\mu\in K$, $v\in V$;
   (iv) das Einselement $1=1_K$ von K erfüllt $1\cdot v=v$ für $v\in V$.

   (c) Sei V ein K-Vektorraum, $(v_1,...,v_n)$ eine Basis von V und $(w_1,...,w_k)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann ist $k\leq n$, und es gibt lauter verschiedene Indices $i_1,...,i_k\in\{1,...,n\}$, so dass man nach Austauschen von $v_{i_1},...,v_{i_k}$ gegen $w_1,...,w_k$ wieder eine Basis von V erhält.

   (d)
   $$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

   (e) f ist ein Gruppenhomomorphismus von $(V,+)$ nach $(W,+)$, d.h.
   $$f(a+b)=f(a)+f(b)\quad \text{für } a,b\in V.$$
   f ist kompatibel mit den skalaren Multiplikationen von V und W, d.h.
   $$f(\lambda\cdot a)=\lambda\cdot f(a)\quad \text{für } \lambda\in K, a\in V.$$

2. *(1+1+2=4 Punkte)*

   (a) $\mathrm{sign}(\sigma)=(-1)^{a_1+...+a_k-k}$.

   (b) $\alpha=(2\ 3\ 4\ 8)(5\ 7\ 6),\quad \beta=(1\ 6\ 7\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

3. *(3+1=4 Punkte)*

(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

(b)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^j	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

4. *(1,5+1,5+1=4 Punkte)*

(a)

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(2-i)(2-i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4-4i-1}{4+1} = \frac{3}{5} + i\frac{-4}{5}, \\ \mathrm{Re}(z_1) &= \frac{3}{5},\ \mathrm{Im}(z_1) = \frac{-4}{5},\ |z_1| = 1. \\ z_2 &= e^{2\pi i\cdot 200/6} = e^{2\pi i(33+1/3)} = e^{2\pi i/3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \mathrm{Re}(z_2) &= \frac{-1}{2},\ \mathrm{Im}(z_2) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ |z_2| = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \frac{ayd-bcy}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2}.$$

5. *(4 Punkte)* Gauß-Algorithmus

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{III}(1,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{II}(2;1,2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_{II}(1;3,2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{III}(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\xrightarrow{\cdots} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

[Der Teil in eckigen Klammern war nicht verlangt.] Der Zeilenrang von C ist 3.

6. *(5 Punkte)*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

$$Z_{II}(-4;1,2) \circ Z_{II}(-3;1,3) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_{II}(-1;3,2) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_{II}(-2;2,1) \circ Z_{II}(4;2,3) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Z_{II}(-3;3,1) \circ Z_I(\frac{-1}{8};3) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{7}{8} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{7}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

7. *(5 Punkte)* Man wählt eine Basis $(v_1, ..., v_k)$ von $\ker(f)$, und man wählt $w_1, ..., w_l \in V$ so, dass $(f(w_1), ..., f(w_l))$ eine Basis von $f(V)$ ist. Es reicht, folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung: $(v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_l)$ ist eine Basis von V.

Beweis: (i) Erzeugendensystem: sei $a \in V$. Es gibt $\mu_1, ..., \mu_l \in K$ mit $f(a) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j f(w_j)$. Man sieht sofort

$$a - \sum_{j=1}^{l} \mu_j w_j \in \ker f.$$

Also gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ mit

$$a - \sum_{j=1}^{l} \mu_j w_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i.$$

Also ist a eine Linearkombination der v_i und w_j.

(ii) Linear unabhängig: Sei $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j w_j = 0$. Sein Bild unter f ist $\sum_{j=1}^{l} \beta_j f(w_j) = 0$. Weil $(f(w_1), ..., f(w_l))$ eine Basis von $f(V)$ ist, sind alle $\beta_j = 0$. Weil $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von $\ker f$ ist, sind auch alle $\alpha_i = 0$. $\square$