Lösungen zur Version A der Zwischenklausur am 25.10.2014 zur Linearen Algebra I

1. *(7=3+2+1+1 Punkte)*

   (a) Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$, wobei G eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf G ist, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

   (G1) Assoziativität: $a * (b * c) = (a * b) * c$ für $a, b, c \in G$.

   (G2) Existenz eines neutralen Elements: Es gibt ein $e \in G$ mit $a * e = a = e * a$ für $a \in G$.

   (G3) Existenz von inversen Elementen: Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $a * a' = a' * a = e$.

   (b) Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum von V, falls $U \neq \emptyset$ ist und falls U abgeschlossen unter der Addition und der skalaren Multiplikation ist, d.h. falls gilt:

$$\begin{aligned} v \in U,\ w \in U \quad &\Rightarrow \quad v + w \in U, \\ \lambda \in K,\ v \in U \quad &\Rightarrow \quad \lambda \cdot v \in U. \end{aligned}$$

   (c) Der Basisergänzungssatz sagt hier, dass es $w_{k+1}, ..., w_n \in V$ gibt, so dass $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis von V ist.

   (d) Eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen in einem Körper K ist eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$.

2. *(7=1+1+1+2+2 Punkte)*

   (a) $\dim_K V = \dim_K \ker(f) + \dim_K f(V)$.

   (b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

   (c) $(A \cdot B)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}$.

   (d) Es gibt einen Körper K und $n, m, l \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt.

$$\begin{aligned} &f : M(n \times 1, K) \to M(m \times 1, K) \quad \text{ist eine lineare Abbildung,} \\ &g : M(m \times 1, K) \to M(l \times 1, K) \quad \text{ist eine lineare Abbildung,} \\ &g \circ f : M(n \times 1, K) \to M(l \times 1, K) \quad \text{ist die lineare Abbildung,} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{die man als Komposition aus } f \text{ und } g \text{ erhält,} \\ &\mathrm{Mat}(f) \in M(m \times n, K), \\ &\mathrm{Mat}(g) \in M(l \times m, K), \\ &\mathrm{Mat}(g \circ f) \in M(l \times n, K). \end{aligned}$$

   (e) Es gibt einen Körper K und $n, m \in \mathbb{N}$ und endlichdimensionale K-Vektorräume V und W, so dass folgendes gilt:

   $f : V \to W$ ist eine lineare Abbildung, $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n)$ ist eine Basis von V, $f(\mathcal{A}) = (f(a_1), ..., f(a_n))$, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_m)$ ist eine Basis von W, und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) \in M(m \times n, K)$.

3. *(7=2+3+1+1 Punkte)*

$$\begin{aligned}
\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 9 & 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 3\ 9)(4\ 6\ 7), \\
\varphi &= (3\ 6)(1\ 2\ 7\ 8)(2\ 5\ 7) = (1\ 2\ 5\ 8)(3\ 6), \\
\operatorname{sign}(\sigma) &= 1 \cdot 1 = 1, \\
\operatorname{sign}(\varphi) &= (-1) \cdot (-1) = 1.
\end{aligned}$$

4. *(7=3+2+2 Punkte)*

(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

(b)

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{5+i}{1+2i} - \frac{2+i}{5} = \frac{(5+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} - \frac{2+i}{5} \\
&= \frac{7-9i}{5} - \frac{2+i}{5} = 1 - 2i, \\
& \quad \Re(a_1) = 1, \quad \Im(a_1) = -2, \quad |a_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \\
a_2 &= (e^{2\pi i \cdot 2/3})^{2014} = e^{2\pi i \cdot 2/3}, \\
& \quad (\text{denn } 2014 = 1 + 3 \cdot 671, \quad (e^{2\pi i \cdot 2/3})^3 = 1) \\
a_2 &= e^{2\pi i \cdot 2/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Re(a_2) = -\frac{1}{2}, \quad \Im(a_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |a_2| = 1.
\end{aligned}$$

5. *(6 Punkte)*

$$\begin{aligned}
A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad &, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \\
Z_{II}(-3;1,3) \circ Z_{II}(-2;1,2) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -12 \end{pmatrix} \quad &, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Z_{III}(2,3) \circ Z_{II}(-2;2,3) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad &, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
Z_I(\frac{-1}{6};3) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad &, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \end{pmatrix} \\
Z_{II}(-7;3,1) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad &, \quad \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{7}{6} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}
\end{aligned}$$

6. *(3+4 Punkte)*

(a)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Z_{II}(1;1,3) \circ Z_{II}(1;1,2) \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist der Zeilenrang von C gleich 3.

(b) Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in einem K-Vektorraum V. Sei $v_{k+1} \in V$.

Behauptung: Die Familie $(v_1, ..., v_{k+1})$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_{k+1} \notin \operatorname{span}(v_1, ..., v_k)$ ist.

Beweis: 1. Fall, $v_{k+1} \in \operatorname{span}(v_1, ..., v_k)$: Dann gibt es $\mu_i \in K$ für $i = 1, ..., k$ mit $v_{k+1} = \sum_{i=1}^k \mu_i v_i$. Dann ist die Linearkombination

$$v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = 0,$$

aber es verschwinden nicht alle ihre Koeffizienten. Also ist die Familie $(v_1, ..., v_{k+1})$ linear abhängig.

2. Fall, $v_{k+1} \notin \operatorname{span}(v_1, ..., v_k)$: Seien $\lambda_i \in K$ mit $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \cdot v_i = 0$. Wäre $\lambda_{k+1} \neq 0$, so wäre

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{k+1}} \cdot v_i \in \operatorname{span}(v_1, ...v_k),$$

ein Widerspruch zur Annahme. Also ist $\lambda_{k+1} = 0$. Weil $(v_1, ..., v_k)$ linear unabhängig ist, sind auch $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. Daher ist $(v_1, ..., v_{k+1})$ linear unabhängig.

7. *(7 Punkte)* Sei $B \subset \mathbb{P}$ eine nichtleere endliche Teilmenge, und seien $\lambda_p = \frac{a_p}{b_p} \in \mathbb{Q}$ für $p \in B$ mit $a_p \in \mathbb{Z}, b_p \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{p \in B} \lambda_p \log(p) = 0.$$

Zu zeigen ist $\lambda_p = 0$ für alle $p \in B$.

Sei $b := \prod_{p \in B} b_p \in \mathbb{N}$. Für alle $p \in B$ ist $\lambda_p \cdot b \in \mathbb{Z}$.

$$0 = \sum_{p \in B} \lambda_p b \cdot \log(p) = \log\left(\prod_{p \in B} p^{\lambda_p b}\right), \text{ also } 1 = \prod_{p \in B} p^{\lambda_p b}.$$

Wenn man die Faktoren mit negativen Exponenten auf die andere Seite stellt, erhält man eine Gleichung zwischen verschiedenen Produkten von Primzahlpotenzen, falls nicht alle Exponenten gleich Null sind. Das geht nicht, also sind alle Exponenten $\lambda_p b = 0$. Also sind alle $\lambda_p = 0$.