Zwischenklausur am 25.10.2014
zur Linearen Algebra I

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 7 Aufgaben, von denen 6 mit 7 Punkten bewertet sind und eine mit 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass wir sehen können, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt und auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer. **Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben können wir keine Punkte vergeben!**

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

(Version A)

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

1. *(7=3+2+1+1 Punkte)*

   (a) Definieren Sie den Begriff *Gruppe*. Den Begriff *Verknüpfung* können Sie als bekannt vorausetzen.

   (b) Sei V ein K-Vektorraum. Definieren Sie den Begriff *Untervektorraum von V*.

   (c) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\dim_K V = n$. Sei $(w_1, ..., w_k)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V (es ist $k \leq n$ nach dem Austauschsatz von Steinitz). Was sagt in dieser Situation der Basisergänzungssatz?

   (d) Definieren Sie den Begriff *obere Dreiecksmatrix* (mit Einträgen in einem Körper K).

2. *(7=1+1+1+2+2 Punkte)*

   (a) Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Geben Sie (ohne Begründung) die Formel an, die die Zahlen $\dim_K V$, $\dim_K \ker(f)$ und $\dim_K f(V)$ verbindet.

   (b) Seien $A, B \in GL(n, K)$. Geben Sie die Formel an, die $(A \cdot B)^{-1}$ mit Hilfe von A^{-1} und B^{-1} ausdrückt.

   (c) Seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Geben Sie die Formel an, die $(A \cdot B)^{tr}$ mit Hilfe von A^{tr} und B^{tr} ausdrückt.

   (d) Geben Sie an, was für Objekte $f, g, g \circ f, \mathrm{Mat}(f), \mathrm{Mat}(g), \mathrm{Mat}(g \circ f)$ in der folgenden Gleichung sind (Matrizen welcher Größe oder Abbildungen von wo nach wo):
   $$\mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g) \cdot \mathrm{Mat}(f).$$
   Sie brauchen *nicht* die Beziehung zwischen f und $\mathrm{Mat}(f)$ etc. zu erklären.

   (e) Geben Sie an, was für Objekte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, f, f(\mathcal{A}), M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$ in der folgenden Gleichung sind:
   $$f(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}).$$
   Sie brauchen *nicht* die Beziehung zwischen $\mathcal{B}, f, \mathcal{A}$ und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$ zu erklären.

3. *(7=2+3+1+1 Punkte)* Schreiben Sie die Permutationen
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 9 & 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi := (3\ 6)(1\ 2\ 7\ 8)(2\ 5\ 7)$$
als Produkte zyklischer Permutationen mit disjunkten Trägern, und bestimmen Sie $\mathrm{sign}(\sigma)$ und $\mathrm{sign}(\varphi)$ (die Formel für das Signum einer zyklischen Permutation können Sie ohne Begründung benutzen).

4. *(7=3+2+2 Punkte)*

   (a) Die obere Zeile der folgenden Tabelle zeigt die Elemente ungleich 0 des Körpers $\mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}_{13}$ (mit den Verknüpfungen $+_{13}$ und $\cdot_{13}$). Schreiben Sie in die untere Zeile die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(b) Bestimmen Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag der folgenden beiden komplexen Zahlen,

$$a_1 := \frac{5+i}{1+2i} - \frac{2+i}{5}, \qquad a_2 := (e^{2\pi i \cdot 2/3})^{2014}.$$

5. *(6 Punkte)* Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

ist invertierbar. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, indem Sie A und E_3 nebeneinander schreiben und simultan geeignete Zeilenumformungen durchführen. Schreiben Sie nach maximal 2 Zeilenumformungen die jeweils erhaltenen Matrizen hin. Notieren Sie auch, welche Zeilenumformungen Sie wann benutzen.

6. *(3+4 Punkte)*

(a) Bringen Sie die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{F}_3)$$

in Zeilenstufenform und geben Sie Ihren Zeilenrang an. Schreiben Sie nach maximal 2 Zeilenumformungen die jeweils erhaltene Matrix hin. Notieren Sie auch, welche Zeilenumformungen Sie wann benutzen. ($\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}_3$ enthält nur die Zahlen $0, 1, 2$. Wir möchten hier keine anderen Zahlen sehen.)

(b) Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in einem K-Vektorraum V. Sei $v_{k+1} \in V$.

Zeigen Sie: Die Familie $(v_1, ..., v_{k+1})$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_{k+1} \notin \mathrm{span}(v_1, ..., v_k)$ ist.

7. *(7 Punkte)* Erinnerung: Der natürliche Logarithmus $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\log(1) = 0$ und $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ und $c \log(a) = \log(a^c)$ für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $c \in \mathbb{R}$.

Sei $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist eine Primzahl}\} \subset \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(\log(p))_{p \in \mathbb{P}}$ ist eine linear unabhängige Familie des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$.

Hinweis: Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung $n = \prod_{p \in A} p^{k_p}$ mit $A \subset \mathbb{P}$ endlich und $k_p \in \mathbb{N}$ für $p \in A$. Die Eindeutigkeit heißt, dass A und die k_p eindeutig sind. Im Fall $n = 1$ ist $A = \emptyset$.

Viel Erfolg!