Lineare Algebra I, HWS 2019, Mannheim

Ergänzungen in der großen Übung zu Kapitel 2

Der Ring $\mathbb{Z}$ und seine Primzahlen

Definition 2.16 (a) Seien $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{kgV}(a,b) &:= \text{“kleinstes gemeinsames Vielfaches”} = \min(n \in \mathbb{N} \mid a|n \text{ und } b|n), \\ \mathrm{ggT}(a,b) &:= \text{“größter gemeinsamer Teiler”} = \max(n \in \mathbb{N} \mid n|a \text{ und } n|b). \end{aligned}$$

(b) $p \in \mathbb{N}$ mit $p \neq 1$ ist eine Primzahl, falls 1 und p seine einzigen Teiler in $\mathbb{N}$ sind.

Satz 2.17 *Seien $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.*

(a) $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(a,b)\mathbb{Z}$.

(b) Es gibt $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = ka + lb$. Man kann k oder l in $\mathbb{N}$ wählen.

(c) Sei nun p eine Primzahl mit $p|ab$. Dann gilt $p|a$ oder $p|b$.

(d) Seien $p_1, ..., p_k$ und $q_1, ..., q_l$ Primzahlen mit

$$p_1 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot ... \cdot q_l.$$

Dann ist $k = l$, und es gibt eine Bijektion $\sigma \in S_k$ mit

$$p_i = q_{\sigma(i)} \quad \text{für } i = 1, ..., k.$$

Dies ist die Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primzahlen. Sie ist NICHT *selbstverständlich.*

Beweis: (a) $a\mathbb{Z}$ und $b\mathbb{Z}$ sind Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$, also ist auch $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ eine. Nach Satz 1.21 (b) existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.
Aus $m \in a\mathbb{Z}$ und $m \in b\mathbb{Z}$ folgt $a|m$ und $b|m$, also $m \geq \mathrm{kgV}(a,b)$.
Andererseits ist $\mathrm{kgV}(a,b) \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$, also $\mathrm{kgV}(a,b) \geq m$.
Also ist $\mathrm{kgV}(a,b) = m$.

(b) Die Menge $\{ka + lb \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Nach Satz 1.21 (b) existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\{ka + lb \mid k, l \in \mathbb{Z}\} = m\mathbb{Z}$, und es existieren $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$ mit $m = k_0 a + l_0 b$. Mit

$$c := k_0 \frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)} + l_0 \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)} \in \mathbb{N}$$

ist $m = c \cdot \mathrm{ggT}(a,b)$, also $m \geq \mathrm{ggT}(a,b)$.

Wegen $a \in m\mathbb{Z}$ ($\Leftarrow k = 1, l = 0$) und $b \in m\mathbb{Z}$ ($\Leftarrow k = 0, l = 1$) ist m ein Teiler von a und b, also $m \leq \mathrm{ggT}(a, b)$. Es folgt $m = \mathrm{ggT}(a, b)$.
Wenn man k_0 und l_0 abändert zu

$$k_1 = k_0 + \alpha \cdot \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}, \quad l_1 = l_0 - \alpha \cdot \frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)}$$

mit einem beliebigen $\alpha \in \mathbb{Z}$, gilt immer noch $k_1 a + l_1 b = \mathrm{ggT}(a, b)$. Insbesondere kann man $k_1 > 0$ oder $l_1 > 0$ erreichen (aber meistens nicht beides zugleich).

(c) Annahme: $p \not| a$. Zu zeigen: $p|b$.
Annahme und p Primzahl $\Longrightarrow \mathrm{ggT}(a, p) = 1$.
Aus (b) folgt, daß $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $ka + lp = 1$ existieren. Dann ist

$$b = 1 \cdot b = (ka + lp) \cdot b = k(ab) + (lb)p.$$

Mit $p|ab$ folgt $p|b$.

(d) Aus (c) und

$$p_1|(p_1 \cdot ... \cdot p_k) = q_1 \cdot (q_2 \cdot ... \cdot q_l)$$

folgt $p_1|q_1$ oder $p_1|(q_2 \cdot ... \cdot q_l)$. Induktiv folgt: p_1 teilt ein q_j.
Weil q_j eine Primzahl ist, ist $p_1 = q_j$. Daher ist

$$p_2 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot ... \cdot q_{j-1} \cdot q_{j+1} \cdot ... \cdot q_l.$$

Induktiv folgen $k = l$ und die Existenz von $\sigma \in S_k$ mit $p_i = q_{\sigma(i)}$.

□

Polynome

Lemma/Definition 2.18 *Sei R ein Ring.*
(a) (Unsaubere Definition, mit der man aber gut arbeiten kann) Ein Polynom in einer Variablen t mit Koeffizienten in R ist ein Ausdruck der Gestalt

$$a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n \qquad \text{mit } a_0, a_1, ..., a_n \in R.$$

t ist eine „Unbestimmte“.

Vorsicht: das n hier ist nicht eindeutig; es ist

$$a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n + 0 \cdot t^{n+1} + ... + 0 \cdot t^{n+k}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ beliebig.}$$

Das Nullpolynom ist das Polynom $0 + 0 \cdot t + ... + 0 \cdot t^n = 0$.

(b) (Saubere Definition) Ein Polynom in einer Variablen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to R, \quad i \mapsto a(i) =: a_i$, bei der nur endlich viele Zahlen i einen Wert

$a_i \neq 0$ haben. Nun kann man ein $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass für alle $i > n$ $a_i = 0$ ist und die Abbildung a wie in Teil (a) notieren, als $f = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$. So kommt man zur unsauberen, aber anschaulichen Definition in (a).

(c) (Definition) Der Grad eines Polynoms $f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ mit $f(t) \neq 0$ ist

$$\deg f(t) := \max\{k \mid a_k \neq 0\}.$$

Der Grad des Nullpolynoms 0 ist $-\infty$.

(d) Die Menge $R[t]$ aller Polynome in einer Variablen t mit Koeffizienten in R ist zusammen mit den folgenden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Ring, der „Polynomring“ $(R[t], +, \cdot)$. Addition (z.B. für $n \geq m$):

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n) + (b_0 + b_1 t + ... + b_m t^m) \\ := \; & (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_n + b_n)t^n, \\ & \text{mit } b_{m+1} := 0, ..., b_n := 0, \end{aligned}$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n) \cdot (b_0 + b_1 t + ... + b_m t^m) \\ := \; & c_0 + c_1 t^1 + ... + c_{n+m} t^{n+m}, \\ \text{mit} \quad & c_k := a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + ... + a_0 b_k, \\ \text{und} \quad & a_k := 0 \text{ für } k > n, \quad b_l := 0 \text{ für } l > m, \\ \text{also} \quad & c_0 = a_0 b_0, \; c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1, \; c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, ... \\ & c_{n+m} = a_n b_m = a_{n+m} b_0 + ... + a_n b_m + ... + a_0 b_{n+m}. \end{aligned}$$

(e) Ist R ein kommutativer Ring, so auch $R[t]$. Hat R eine 1, so auch $R[t]$.

(f) Ist R ein Körper und sind $p(t), q(t) \in R[t] - \{0\}$, so ist auch $p(t)q(t) \in R[t] - \{0\}$. Es ist $\deg(p(t)q(t)) = \deg p(t) + \deg q(t)$.

(g) Die Abbildung $R \to R[t]$, $a_0 \mapsto a_0$, ist ein injektiver Ringhomomorphismus. Mit seiner Hilfe wird R mit dem Unterring von $R[t]$ identifiziert, der aus den konstanten Polynomen besteht.

(h) Ist R kommutativ, so ist für jedes $c \in R$ die Abbildung

$$\iota_c : R[t] \to R, \quad f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n \mapsto f(c) := a_0 + a_1 c + ... + a_n c^n$$

ein Ringhomomorphismus, ein „Einsetzungshomomorphismus“.

Beweis: (a)-(c) sind Definitionen.
(d) Aufgrund von Blatt 3 Aufgabe 4 ist $(R[t], +)$ eine abelsche Gruppe (die Multiplikation die dort betrachtet wird ist NICHT die Multiplikation im

Polynomring). Wir müssen die Assoziativität der Multiplikation sowie das Distributivgesetz zeigen. Sei $n, m, l \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq l$. Es gilt

$$\begin{aligned}&(a_0 + \ldots + a_n t^n) \cdot \left((b_0 + \ldots + b_m t^m) + (c_0 + \ldots + c_l t^l)\right)\\ =&(a_0 + \ldots + a_n t^n) \cdot ((b_0 + \ldots + b_m t^m) + (c_0 + \ldots + c_m t^m))\\ =&(d_0 + \ldots d_{m+n} t^{m+n})\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a_0 + \ldots + a_n t^n) \cdot (b_0 + \ldots + b_m t^m) + (a_0 + \ldots + a_n t^n) \cdot (c_0 + \ldots + c_l t^l)\\ =&(a_0 + \ldots + a_n t^n) \cdot (b_0 + \ldots + b_m t^m) + (a_0 + \ldots + a_n t^n) \cdot (c_0 + \ldots + c_m t^m)\\ =&(f_0 + \ldots f_{m+n} t^{m+n})\end{aligned}$$

mit $c_{l+1} = \ldots = c_m = 0$. Es ist

$$\begin{aligned}d_k &= a_0 \cdot (b_k + c_k) + \ldots + a_k \cdot (b_0 + c_0)\,,\\ f_k &= a_0 b_k + \ldots a_k b_0 + a_0 c_k + \ldots a_k c_0\,.\end{aligned}$$

Es gilt $d_k = f_k$ aufgrund des Distributivgesetzes in R. Der Beweis der Assoziativität der Multiplikation in $R[t]$ ist ähnlich und lässt sich auf die Assoziativität der Multiplikation in R zurückführen.
(e) Es ist

$$\begin{aligned}&(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) \cdot (b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n+m} t^{n+m}\,,\\ &(b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m) \cdot (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = d_0 + d_1 t + \ldots + d_{n+m} t^{n+m}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}c_k &= a_k b_0 + \ldots + a_0 b_k\,,\\ d_k &= b_k a_0 + \ldots + b_0 a_k\,.\end{aligned}$$

Aufgrund der Kommutativität von R ist $c_k = d_k$.
(f) Es sei $\deg p(t) = n \geq 0$, also $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ mit $a_n \neq 0$, und $\deg q(t) = m \geq 0$, also $q(t) = b_0 + b_1 t + ... + b_m t^m$ mit $b_m \neq 0$. Dann ist $p(t)q(t) = a_0 b_0 + ... + a_n b_m t^{n+m}$ mit $a_n b_m \neq 0$ (Lemma 2.4 (d), hier braucht man die Voraussetzung R Körper). Also ist $p(t)q(t) \neq 0$ und $\deg p(t)q(t) = n + m$.

(g) Klar.
(h) Sei $f(t) := a_0 + \ldots a_n t^n$ und $g(t) := b_0 + \ldots + b_m t^m$ und $n \geq m$. Es ist

$$i_c(f(t)+g(t)) = i_c\left((a_0 + b_0) + \ldots (a_n + b_n) t^n\right) = (a_0 + b_0) + \ldots + (a_n + b_n) c^n\,,$$

$$i_c(f(t)) + i_c(g(t)) = a_0 + \ldots a_n c^n + b_0 + \ldots b_n c^n\,,$$

wobei $b_{m+1} = \ldots = b_n = 0$. Die Homomorphie bzgl. "+" folgt dann aus dem Distributivgesetz in R. Weiter gilt

$$i_c(f(t) \cdot g(t)) = i_c\left(d_0 + \ldots d_{n+m} t^{n+m}\right) = d_0 + \ldots d_{n+m} c^{n+m}$$

mit $d_k = a_k b_0 + \ldots + a_0 b_k$ und

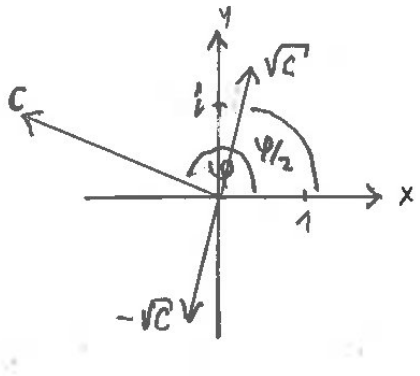
$$\begin{aligned} i_c(f(t)) \cdot i_c(g(t)) =& (a_0 + \ldots + a_n c^n) \cdot (b_0 + \ldots + b_m c^m) \\ =& a_0 b_0 + (a_1 c b_0 + a_0 b_1 c) + \ldots + a_n c^n b_m c^m \,. \end{aligned}$$

Die Homomorphie bzgl. "$\cdot$" folgt aus dem Distributivgesetz und der Kommutativität von R (Man muss das Element c und die Koeffizienten $b_0, ..., b_m$ vertauschen). □

Satz 2.19 *(Fundamentalsatz der Algebra; Beweis nicht in der linearen Algebra)*
Jedes Polynom $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg f(t) \geq 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h. eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ existiert mit $f(c) = 0$.

Beispiel 2.20 (i) Die analoge Aussage für $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{C}$ ist falsch; das Polynom $t^2 + 1$ hat keine reellen Nullstellen.

(ii) Das Polynom $t^2 - c$ für ein $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ hat 2 Nullstellen in $\mathbb{C}$, von denen man eine $\sqrt{c}$ nennen kann, z.B die mit Argument in $[0, \pi)$; dann ist die andere $-\sqrt{c}$. Ist $c = |c| \cdot e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$, so ist $\pm\sqrt{c} = \pm\sqrt{|c|} \cdot e^{i\varphi/2}$.



(iii) Das Polynom $t^2 + pt + q$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ hat die beiden Nullstellen (manchmal fallen sie zusammen)

$$c_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}, \quad c_2 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}.$$

Es ist

$$(t - c_1)(t - c_2) = t^2 - (c_1 + c_2)t + c_1 c_2 = t^2 + pt + q.$$

(iv) Zusammen geben (ii) und (iii) einen Beweis von Satz 2.19 im Fall von Polynomen vom Grad 2.
(v) Sind $p, q \in \mathbb{R}$, so sind die Nullstellen von $t^2 + pt + q$ reell $\iff$ $p^2 - 4q \geq 0$.

Satz 2.21 *Es sei K ein Körper.*

(a) (Polynomdivision mit Rest) Es seien $f(t), g(t) \in K[t]$ und $\deg g(t) \geq 1$. *Dann gibt es eindeutige Polynome $q(t)$ und $r(t)$ mit* $\deg r(t) < \deg g(t)$ *und*

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t).$$

(b) Sei $f(t) \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg f(t) = n \geq 1$ *und mit einer Nullstelle $c \in K$.*
Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $q(t) \in K[t]$ mit

$$f(t) = (t - c) \cdot q(t).$$

Es ist $\deg q(t) = n - 1$.

(c) Sind $c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n \in K$ mit

$$(t - c_1) \cdot ... \cdot (t - c_n) = (t - d_1) \cdot ... \cdot (t - d_n),$$

so gibt es ein $\sigma \in S_n$ mit $c_i = d_{\sigma(i)}$ für $i = 1, ..., n$.

Beispiel 2.22 zur Polynomdivision mit Rest.
$f(t) = 2t^3 - t^2 + 1,\ g(t) = t^2 + 1,$

$$\begin{array}{llll|l} (2t^3 & -t^2 & & +1) & : (t^2+1) = 2t - 1 + (-2t+2) : (t^2+1) \\ \cline{1-4} 2t^3 & & +2t & & \\ \cline{1-3} & -t^2 & -2t & +1 & \\ & -t^2 & & -1 & \\ \cline{2-4} & & -2t & +2 & \end{array}$$

also ist $q(t) = 2t - 1$ und $r(t) = -2t + 2$.

Beweis von Satz 2.21: (a) Zuerst die **Eindeutigkeit** von $q(t)$ und $r(t)$: Sei $f(t) = q_1(t)g(t) + r_1(t) = q_2(t)g(t) + r_2(t)$ mit $\deg r_1(t) < \deg g(t)$ und $\deg r_2(t) < \deg g(t)$. Dann ist

$$(q_1(t) - q_2(t))g(t) = r_2(t) - r_1(t).$$

Wäre $q_1(t) \neq q_2(t)$, so wäre wegen Lemma/Definition 2.18 (f)

$$\deg\left((q_1(t) - q_2(t))g(t)\right) \geq \deg g(t) > \deg(r_1(t) - r_2(t)).$$

Widerspruch. Also ist $q_1(t) = q_2(t)$ und $r_1(t) = r_2(t)$.

Nun die **Existenz** von $q(t)$ und $r(t)$: Man führt den Beweis über vollständige Induktion nach $\deg f(t) - \deg g(t)$.
Induktionsanfang: Ist $\deg f(t) < \deg g(t)$, so ist $q(t) = 0$ und $r(t) = f(t)$.

Induktionsschritt: Sei $n = \deg f(t) \geq \deg g(t) = m$ und $f(t) = a_n t^n + ... + a_0$, $g(t) = b_m t^m + ... + b_0$. Dann hat

$$f_2(t) := f(t) - \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} g(t)$$

kleineren Grad als $f(t)$. Also gibt es nach Induktionsannahme $q_2(t)$ und $r_2(t)$ mit $\deg r_2(t) < \deg g(t)$ und $f_2(t) = q_2(t)g(t) + r_2(t)$. Daher ist

$$f(t) = (\frac{a_n}{b_m} t^{n-m} + q_2(t))g(t) + r_2(t).$$

Ende des Induktionsbeweises.

(b) Polynomdivision mit Rest gibt $f(t) = q(t)(t-c) + r$ mit $q(t) \in K[t]$ und $r \in K$. Wegen $f(c) = 0$ ist $r = 0$. Wegen der Eindeutigkeit in a) ist $q(t)$ eindeutig.

(c) Annahme: $c_1 \notin \{d_1, ..., d_n\}$. Einsetzen von c_1 für t gibt

$$\begin{aligned} 0 &= (c_1 - c_1) \cdot (c_1 - c_2) \cdot ... \cdot (c_1 - c_n) \quad \text{(Lemma 2.4 (a))} \\ &= (c_1 - d_1) \cdot ... \cdot (c_1 - d_n) \neq 0 \quad \text{(Lemma 2.4 (d))}. \end{aligned}$$

Widerspruch. Also gibt es ein j mit $c_1 = d_j$.

Division durch $(t - c_1)$ gibt

$$(t - c_2) \cdot ... \cdot (t - c_n) = (t - d_1) \cdot ... \cdot (t - d_{j-1})(t - d_{j+1}) \cdot ... \cdot (t - d_n).$$

Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung. □

Satz 2.23 *(Anwendung von Satz 2.19 und Satz 2.21)*
(a) Für jedes Polynom $f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n \in \mathbb{C}[t]$ *mit* $\deg f(t) = n \geq 1$ *(also* $a_n \neq 0$*) gibt es (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Zahlen* $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ *mit*

$$f(t) = a_n \cdot (t - c_1) \cdot ... \cdot (t - c_n).$$

Die Zahlen $c_1, ..., c_n$ *sind die Nullstellen von* $f(t)$*. Man sagt: ein komplexes Polynom zerfällt in Linearfaktoren.*

(b) Für jedes Polynom $f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n \in \mathbb{R}[t]$ *mit* $\deg f(t) = n \geq 1$ *gibt es (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Zahlen* $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ *und (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Polynome* $q_1(t), .., q_l(t) \in \mathbb{R}[t]$ *mit*

$$f(t) = a_n \cdot (t - c_1) \cdot ... \cdot (t - c_k) \cdot q_1(t) \cdot ... \cdot q_l(t)$$

und

$$q_j(t) = t^2 + \alpha_j t + \beta_j, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$$

($\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$ *sagt, daß* $q_j(t)$ *keine reelle Nullstelle hat).*
Es ist $0 \leq k \leq n$ *und* $0 \leq l \leq \frac{n}{2}$*. Es ist* $k + 2l = n$*.*
Man sagt: ein reelles Polynom zerfällt in lineare und quadratische Faktoren.

Beweis: (a) Durch wiederholte Anwendung von Satz 2.19 und Satz 2.21 (b) bekommt man eine Zerlegung von $f(t)$ in Linearfaktoren, mit Satz 2.21 c) ihre Eindeutigkeit.

(b) Ist $c \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, so auch $\overline{c}$, denn wegen $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f(\overline{c}) &= a_0 + a_1 \cdot \overline{c} + ... + a_n \cdot \overline{c}^n \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{c} + ... + \overline{a_n} \cdot \overline{c}^n \\ &= \overline{a_0 + a_1 \cdot c + ... + a_n \cdot c^n} \\ &= \overline{f(c)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

($\overline{\cdot}$ ist ein Körperisomorphismus von $\mathbb{C}$ auf sich selbst). Nach (a) ist $f(t) = a_n(t - c_1) \cdot ... \cdot (t - c_n)$ mit $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$. Die c_i seien so numeriert, daß $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$, $c_{k+1}, ..., c_n \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Wegen der Rechnung oben und wegen Satz 2.21 (c) gibt es ein $\sigma \in S_n$ mit $\overline{c_i} = c_{\sigma(i)}$. Diese Permutation bildet $\{j \mid k < j \leq n, \Im(c_j) > 0\}$ bijektiv auf $\{j \mid k < j \leq n, \Im(c_j) < 0\}$ ab. Es ist

$$(t - c_j)(t - \overline{c_j}) = t^2 - (c_j + \overline{c_j})t + c_j\overline{c_j} \in \mathbb{R}[t],$$

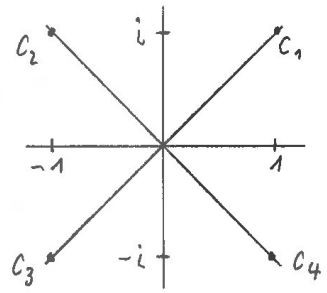
und dieses Polynom hat keine reelle Nullstelle, falls $c_j \notin \mathbb{R}$.

Man wählt eine Bijektion (für l geeignet) $\tau : \{1, 2, ..., l\} \to \{j \mid k < j \leq n, \Im(c_j) > 0\}$ und definiert

$$q_j(t) := (t - c_{\tau(j)})(t - \overline{c_{\tau(j)}}).$$

□

Beispiel 2.24 Das reelle Polynom $t^4 + 4$ hat die komplexen Nullstellen $c_j := \sqrt{2}e^{2\pi i \frac{2j-1}{8}}$, $j = 1, 2, 3, 4$.



$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{2} \cdot e^{2\pi i/8} = 1 + i \\ c_2 &= \sqrt{2} \cdot e^{2\pi i \cdot 3/8} = -1 + i \\ c_3 &= \sqrt{2} \cdot e^{2\pi i \cdot 5/8} = -1 - i \\ c_4 &= \sqrt{2} \cdot e^{2\pi i \cdot 7/8} = 1 - i \end{aligned}$$

Sie erfüllen $\overline{c_1} = c_4, \overline{c_2} = c_3$. Daher ist

$$\begin{aligned} t^4 + 4 &= (t - c_1)(t - c_2)(t - c_3)(t - c_4) \\ &= (t^2 - (c_1 + c_4)t + c_1c_4)(t^2 - (c_2 + c_3)t + c_2c_3) \\ &= (t^2 - 2t + 2)(t^2 + 2t + 2). \end{aligned}$$