Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Khadija Larabi

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+0,5+0,5+1+1 Punkte)*

   (a) Definieren Sie, wann eine symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum *positiv definit ist*. Den Begriff *symmetrische Bilinearform* können Sie als bekannt voraussetzen.

   (b) Definieren Sie, was ein *Euklidischer Vektorraum* ist und was sein *Skalarprodukt* ist.

   (c) Gegeben sei ein Euklidischer Vektorraum V mit Skalarprodukt ϕ. Definieren Sie die Länge eines Vektors $v \in V$.

   (d) Gegeben sei ein Euklidischer Vektorraum V mit Skalarprodukt ϕ. Formulieren Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

   (e) Gegeben sei ein Euklidischer Vektorraum V mit Skalarprodukt ϕ. Definieren Sie den Winkel $\measuredangle(v,w) \in [0,\pi]$ zwischen 2 Vektoren $v,w \in V - \{0\}$.

2. *(3 Punkte)* Man bestimme zu den drei Vektoren

$$v_1 := (1, \sqrt{2}, 1), \quad v_2 := (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), \quad v_3 := (0,0,-3)$$

   im $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt ϕ) ihre Längen und die Winkel zwischen ihnen, d.h. $\|v_i\|$ und $\measuredangle(v_i, v_j)$ (für $i \neq j$).

3. *(1+1+2 Punkte)*

   (a) Definieren Sie, was eine *Norm* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist.

   (b) Definieren Sie, was eine Metrik auf einer nichtleeren Menge X ist.

   (c) Es seien $m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$, und X sei eine Menge mit n Elementen. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} d_H : X^m \times X^m &\to \mathbb{N} \cup \{0\} \\ ((x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m)) &\mapsto (\text{Anzahl der } i \text{ mit } x_i \neq y_i) \end{aligned}$$

   eine Metrik auf X^m ist.
   Bemerkung: Sie heißt Hamming-Metrik und ist in der Kodierungstheorie wichtig.

4. *(3 Punkte)* Betrachten Sie den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Die vier Vektoren

$$a_1 = (0,0,1,1), \quad a_2 = (1,2,0,2), \quad , a_3 = (1,0,1,0), \quad a_4 = (2, \frac{7}{2}, 2, 0)$$

   bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$ (das brauchen Sie nicht zu beweisen). Wenden Sie auf diese Basis das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an. Nennen Sie die erhaltene Orthogonalbasis (b_1, b_2, b_3, b_4). Normieren Sie diese Basis zu einer ON-Basis (c_1, c_2, c_3, c_4). Schreiben Sie alle Rechnungen und die Basen (b_1, b_2, b_3, b_4) und (c_1, c_2, c_3, c_4) auf.

5. *(2 Punkte)* Sei $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Weil das charakteristische Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, hat sie als Matrix in $M(n\times n, \mathbb{C})$ Eigenwerte in $\mathbb{C}$.

   (a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A als komplexer Matrix. Zeigen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Hinweise: Wenn $v = (x_1 \cdots x_n)^{tr} \in M(n \times 1, \mathbb{C}) - \{0\}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert λ ist, welche Eigenschaft hat dann $\overline{v} := (\overline{x_1} \cdots \overline{x_n})^{tr}$? Beachten Sie auch $v^{tr} \cdot \overline{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} > 0$.

   (b) Seien $v_1, v_2 \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ Eigenvektoren mit $A \cdot v_i = \lambda_i v_i$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie $v_1 \perp v_2$ (bezüglich des Standardskalarproduktes auf $M(n\times 1, \mathbb{R})$).

Abgabe bis Donnerstag, den 05. Dezember 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5
Die korrigierten Lösungen können bei Frau Spether (B6, B417) abgeholt werden (wann, kann Ihr Tutor Ihnen sagen). Nicht abgeholte Lösungen werden im Februar 2019 entsorgt.

Die Klausur zur Linearen Algebra I am 20.12.2019 findet um 08:30-10:00 in den Hörsälen W 117 und A3 001 statt.
Wie bei der Probeklausur sind keine Hilfsmittel erlaubt, weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher noch Taschenrechner oder ähnliches. Papier wird gestellt. Sie brauchen nur einen Lichtbildausweis und Stifte zum Schreiben. Die Taschen legen Sie bitte an den Seiten des Hörsaals ab. Ein Platz im Hörsaal W 117 (Anfangsbuchstabe Nachname: A-D) oder im Hörsaal A3 001 (Anfangsbuchstabe Nachname: E-Z) wird Ihnen vom Prüfungsamt zugewiesen. Eine Liste mit der Zuordnung Matrikelnummer $\longrightarrow$ Platz wird auch am 20.12.2019 kurz vor 08:30 an den Hörsaaltüren ausgehängt.