Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(4 Punkte)* Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums (für ein $n \in \mathbb{N}$). Das charakteristische Polynom habe die Gestalt $P_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, d.h. das Polynom $P_f(t)$ hat n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Zeigen Sie:
$$\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda) = \begin{cases} 1 & falls\ \lambda = \lambda_i\ \textit{für ein}\ i \in \{1, ..., n\}, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$
und wenn man Vektoren $v_i \in V$ *mit* $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = K \cdot v_i = \mathrm{span}(v_i)$ *gewählt hat, so sind diese linear unabhängig.*

   Hinweise: Der Beweis ist nicht so einfach. Er benutzt neben Satz 8.4 (a) auch die Vandermonde-Determinante. Satz 8.11 darf nicht benutzt werden.

   Bemerkungen: Daher ist dann f diagonalisierbar. Dies ist ein wichtiger Spezialfall eines *diagonalisierbaren* Endomorphismus (Definition 8.6 (a)). Wenn $P_f(t)$ lauter verschiedene Eigenwerte hat, ist man in diesem Spezialfall. Das ist bequem.

2. *(2+1 Punkte)* Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

   (a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:
$$\ker(f^k) = \ker(f^{k+1}) \Rightarrow \ker(f^{k+1}) = \ker(f^{k+2}).$$

   (b) Der Hauptraum zu einer Zahl $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum von V mit
$$\mathrm{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^k) \subset V.$$
   Zeigen Sie mit Hilfe von (a)
$$\begin{aligned} \mathrm{Hau}(f, \lambda) &= \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^{k_0}) \\ \text{mit} \quad k_0 &:= \min(k \mid \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^k) = \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^{k+1}). \end{aligned}$$

3. *(4 Punkte)* Die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ in $M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ hat nur ganzzahlige Eigenwerte, und zwar nur zwei, d.h. es ist $P_B(t) = (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_2)$ für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix, die Eigenwerte λ_1 und λ_2, die Eigenräume $\mathrm{Eig}(B, \lambda_1)$ und $\mathrm{Eig}(B, \lambda_2)$ und den Hauptraum $\mathrm{Hau}(B, \lambda_1)$. Geben Sie eine Basis (v_1, v_2, v_3) von $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$ mit
$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(B, \lambda_1) &= \mathrm{span}(v_1), \\ \mathrm{Hau}(B, \lambda_1) &= \mathrm{span}(v_1, v_2), \\ \mathrm{Eig}(B, \lambda_2) &= \mathrm{span}(v_3) \end{aligned}$$
   an.

4. *(1+1+1 Punkte)* (Fortsetzung von Aufgabe 5 von Blatt 8)

   Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$, und seien alle Einträge $a_{ij} > 0$. Nach Aufgabe 5 von Blatt 8 ist $\mathrm{Eig}(A, 1) \supsetneqq \{0\}$. Sei $v \in \mathrm{Eig}(A, 1) - \{0\}$ mit $v_a > 0$ für mindestens ein $a \in \{1, ..., n\}$.

   (a) Zeigen Sie $v_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.
   Hinweis: Beachten Sie $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ für alle i, $a_{ij} > 0$ für alle (i, j), $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ für alle i, betrachten Sie $\sum_{i=1}^n |v_i|$, und führen Sie einen indirekten Beweis.

   (b) Zeigen Sie $v_i > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.
   Hinweis: Beachten Sie wieder $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ für alle i.

   (c) Zeigen Sie $\mathrm{Eig}(A, 1) = \mathrm{span}(v)$.
   Hinweis: $\mathrm{Eig}(A, 1)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Differenz von je zwei verschiedenen Eigenvektoren mit Eigenwert 1 ist wieder ein Eigenvektor mit Eigenwert 1. Beachten Sie (a).

   Bemerkung: Die lineare Algebra hier ist bei der Berechnung des PageRank bei Google relevant. Man hat die sehr große, aber endliche Menge aller Web-Seiten mit der Menge $J = \{1, ..., N\}$ für ein sehr großes $N \in \mathbb{N}$ indiziert. Man ordnet jeder Web-Seite $i \in J$ in folgender Weise einen *PageRank* $v_i \in \mathbb{R}_{>0}$ zu.

   Der PageRank v_i ergibt sich daraus, wie oft eine Web-Seite i von einem Benutzer ohne besondere Interessen angeklickt wird. Ein erster guter Ansatz dafür ist $v_i = \sum_{j \in J : (j \text{ Link } i)} v_j / \deg(j)$, wobei ($j$ Link i) bedeutet, dass die Webseite j auf die Webseite i verlinkt, und wobei $\deg(j)$ die Anzahl der Webseiten ist, auf die die Webseite j verlinkt. Aber der Ansatz ist noch zu eng. Von einer Webseite j mit $\deg(j) = 0$ geht man mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/N$ zu jeder beliebigen Webseite. Und auch bei Webseiten j mit $\deg(j) > 0$ mischt man so ein zufälliges Verhalten bei. Man wählt einen Parameter $\alpha \in (0, 1)$ (typischerweise nahe 0) und betrachtet folgende Matrix $A \in M(N \times N, \mathbb{R}_{>0})$:

$$A_{ij} \quad := \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{N} & \text{falls } j \text{ nicht auf } i \text{ verlinkt, aber } \deg(j) > 0 \text{ ist,} \\ \frac{1-\alpha}{\deg(j)} + \frac{\alpha}{N} & \text{falls } j \text{ auf } i \text{ verlinkt (dann ist } \deg(j) > 0), \\ \frac{1}{N} & \text{falls } \deg(j) = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

   Sie erfüllt die Eigenschaften in der Aufgabe oben. Nach der Aufgabe oben existiert ein Eigenvektor $v \in \mathrm{Eig}(A, 1) - \{0\}$, also mit $A \cdot v = v$. Die Normierungsbedingung $\sum_{i=1}^N v_i = N$ macht ihn eindeutig. Er ist in $M(n \times 1, \mathbb{R}_{>0})$. Er ist der Vektor der PageRanks der Web-Seiten. Da N sehr groß ist, braucht man gute numerische Techniken, um diesen Eigenvektor v zum Eigenwert 1 zu berechnen.

5. *(2 Punkte)* Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt *symmetrisch*, falls $A^{tr} = A$ gilt. Sie heißt *schiefsymmetrisch*, falls $A^{tr} = -A$ gilt.

   Zeigen Sie, dass zu jeder Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix $A^{(1)}$ und eine schief-symmetrische Matrix $A^{(2)}$ existieren, die $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ erfüllen, und dass diese Matrizen eindeutig sind.

Abgabe bis Donnerstag, den 28. November 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5