Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Khadija Larabi

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *((1+1)+3 Punkte)*

   (a) Formulieren Sie die Cramersche Regel in der allgemeinen Version (Ring R und $\det A$ beliebig) und in der klassischen Version ($\det A \neq 0$, Körper K).

   (b) Lösen Sie das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem mit $a, c, d \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der klassischen Version der Cramerschen Regel.

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & a \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & c \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & d \end{array}$$

   Hinweise: (i) Dazu müssen Sie die Determinanten von vier (3×3)-Matrizen ausrechnen.
   (ii) Andere Lösungswege als die Cramersche Regel sind nicht zugelassen.

2. *(4 Punkte)* Beweisen Sie die folgende Formel mit vollständiger Induktion und mit Laplace-Entwicklung (wählen Sie selbst, nach welcher Zeile oder Spalte Sie entwickeln). Die Matrix ist eine $(n+1) \times (n+1)$-Matrix. Wo nichts steht, stehen Nullen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -t & -a_{n-1} \\ & & 1 & -t - a_n \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}(t^{n+1} + a_n t^n + ... + a_0).$$

3. *(1+2+1 Punkte)* Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine quadratische Matrix.

   (a) Definieren Sie das *charakteristische Polynom* $P_A(t)$ der Matrix A.

   (b) Definieren Sie, was bei der Matrix A ein *Eigenvektor* v ist, was der *Eigenraum* $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ zu einem Wert $\lambda \in K$ ist, und wann ein Wert $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* ist. (Gehen Sie *nicht* über die Definition der analogen Objekte bei einem Endomorphismus, sondern geben Sie direkte Definitionen.)

   (c) Beweisen Sie: $\lambda \in K$ *ist ein Eigenwert von* $A \iff P_A(\lambda) = 0$.

4. *(3 Punkte)* Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ in $M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ hat 3 verschiedene Eigenwerte, die übrigens alle ganzzahlig sind. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix, die Eigenwerte, und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

Abgabe bis Donnerstag, den 21. November 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5