Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie irgendwie die Determinanten der folgenden Matrizen (mit $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 & 11 \\ 5 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & c \\ -b & 0 & 0 & d \\ 0 & -c & -d & 0 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Bei der fünften Matrix bietet sich die Leibniz-Formel an, denn aufgrund der vielen Nullen bleiben nur 4 Summanden übrig.

2. *(4 Punkte)* (Vandermonde-Determinante) Beweisen Sie die folgende Formel. Hier sind $x_1, ..., x_n \in R$ für irgendeinen kommutativen Ring R mit 1.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

   Hier ist $\prod_{1 \le i < j \le n}$ das Produkt über alle Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, ..., n\}$ und $i < j$.

   Hinweise: Ziehen Sie zuerst die erste Zeile von den anderen Zeilen ab. Das verkleinert die Größe der relevanten Matrix um eins, wegen Beispiel 7.2 (d). Dann ziehen Sie (mit Hilfe der Multilinearität bezüglich der Zeilen) Faktoren $(x_j - x_1)$ aus der Determinante. Danach ziehen Sie (mit Hilfe der Multilinearität bezüglich der Spalten: die gilt auch, und die dürfen Sie auch benutzen!) geeignete Spalten voneinander ab. Nun sollten Sie mit vollständiger Induktion durchkommen.

3. *(1+2+1 Punkte)* Definition 7.13: Sei $A \in M(n \times n, R)$ und $i, j \in \{1, .., n\}$. Mit $A[i, j]$ wird die $((n-1) \times (n-1))$-Matrix bezeichnet, die man aus A erhält, indem man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht. Die Matrix $A^\sharp \in M(n \times n, R)$ hat die Einträge

$$(A^\sharp)_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[j, i]$$

   (Vorsicht: $[j, i]$, nicht $[i, j]$) und wird *Komplementärmatrix zur Matrix A* genannt.

Berechnen Sie die Komplementärmatrizen $A_1^\sharp$, $A_2^\sharp$ und $A_3^\sharp$ der drei Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie bei $A_3^\sharp$ bitte nicht Aufgabe 1 von Blatt 7 und Korollar 7.17 (a).

4. *(2+1 Punkte)*

(a) Es sei

$$GL(n, \mathbb{Z}) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ und } A^{-1} \in M(n \times n, \mathbb{Z})\}.$$

Zeigen Sie

$$Gl(n, \mathbb{Z}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}.$$

Hinweis: Hier dürfen und sollen Sie benutzen, dass sich die inverse Matrix A^{-1} einer invertierbaren Matrix $A \in GL(n, K)$ mit der Komplementärmatrix $A^\sharp$ und der Determinante $\det A (\in K - \{0\})$ so beschreiben läßt (= Korollar 7.17 (a)):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^\sharp$$

(b) Zeigen Sie, dass $GL(n, \mathbb{Z})$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{Q})$ ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 14. November 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5