Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(2 Punkte)* Der Mathematiker Diophant hat irgendwann zwischen 150 und 350 unserer Zeitrechnung in Alexandria gelebt. Geburtsdatum und Todesdatum kennt man nicht. Aber über sein Alter gibt ein Epigramm aus späthellenistischer Zeit Auskunft, das als Grabinschrift gedacht werden soll. Hier ist eine deutsche Übersetzung.

   Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!
   Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
   Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
   Noch ein Zwölftel dazu sproßt' auf der Wange der Bart;
   Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
   Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
   Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
   Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
   Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
   von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.

   Wie alt ist Diophant geworden?

   Ein Punkt zur Klärung: Der Sohn erreicht die Hälfte des Gesamtalters des Vaters (nicht die Hälfte des Alters des Vaters zum Zeitpunkt des Todes des Sohnes).

2. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, b)$ in $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

   Hinweise: (i) Satz 6.3 (c) ist hilfreich: Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ändert sich nicht, wenn man die Matrix $(A\ b)$ durch Zeilenumformungen abändert. Daher kann man mit dem Gauß-Algorithmus A auf obere Dreiecksgestalt bringen. Dann kann man die Lösungsmenge ziemlich leicht sehen, vgl. Satz 6.3.

   (ii) Man muß (nicht sofort, sondern später im Lauf der Rechnungen) 3 Fälle unterscheiden.

3. *(3 Punkte)* Alice is as old as Betty and Christine together. Last year Betty was twice as old as Christine. Two years hence Alice will be twice as old as Christine. What are the ages of the three girls?

4. *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Lösungsmengen in $M(4 \times 1, \mathbb{R})$ des folgenden inhomogenen Gleichungssystems und des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 7x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 24 \\ - & 4x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -17 \\ & 7x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 27 \\ & 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & & & = & 21 \\ & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}$$

5. *(2 Punkte)* Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$. Zeigen Sie, dass es (mindestens) einen Vektor $v \in M(n \times 1, \mathbb{R}) - \{0\}$ mit $A \cdot v = v$ gibt.

   Hinweise: Wie kann man die Bedingung $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für alle j mit Matrizen ausdrücken? Was sagt sie über den Zeilenrang der Matrix $A - E_n$? Welche Aussage über den Spaltenrang von $A - E_n$ braucht man für die Existenz von $v \neq 0$ mit $A \cdot v = v$?

Abgabe bis Donnerstag, den 07. November 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5