Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(3 Punkte)* Für $a, b, c, d, e, f \in K$, wo K ein beliebiger Körper ist, sind die Matrizen

$$A_1 := (1), \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wegen Satz 4.13 (d) invertierbar. Es ist (das müssen Sie nicht beweisen)

$$A_1^{-1} = (1), \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Inverse A_4^{-1} der Matrix A_4 mit Hilfe des Algorithmus in Bemerkung 4.14.

(Die Matrizen A_1, A_2 und A_3 stehen hier nur, damit Sie sehen, wie sich das Ergebnis Ihrer Rechnungen in eine Serie einbettet, und damit Sie die Richtigkeit ihres Ergebnisses abschätzen können.)

2. *(3+1 Punkte)*

   (a) Wieviele Elemente hat $GL(n, \mathbb{F}_p)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Hinweise: Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{F}_p)$ ist invertierbar, wenn ihre Zeilen $v_i := (a_{i1}, ..., a_{in})$, $i = 1, 2, ..., n$, linear unabhängig sind. Wenn man zuerst v_1 wählt, so hat man da $p^n - 1 = |\mathbb{F}_p^n - \{0\}|$ Möglichkeiten. Wieviele Möglichkeiten hat man danach für v_2, danach für $v_3, ...$ und am Ende für v_n? Hinweis: Aufgabe 2 (b) von Blatt 6.

   (b) Geben Sie ohne Begründung die Elemente von $GL(2, \mathbb{F}_2)$ an.

3. *(2 Punkte)* Geben Sie an, was für Objekte $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}$, $\widetilde{\mathcal{B}}$ und f in der folgenden Gleichung aus Kapitel 5 sind, und geben Sie die definierenden Gleichungen für die 4 Matrizen $M(\widetilde{\mathcal{B}}, f, \widetilde{\mathcal{A}})$, $M(\widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$ und $M(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}})$ an:

$$M(\widetilde{\mathcal{B}}, f, \widetilde{\mathcal{A}}) = M(\widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}).$$

4. *(2 Punkte)* Eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 4 ist $\mathcal{B} := (1, t, t^2, t^3, t^4)$. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 4}, \quad g(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(g(t-1)),$$

ist linear (das brauchen Sie nicht zu beweisen). Bestimmen Sie $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$. Was ist der Rang von f?

5. *(2+1+2 Punkte)*

(a) Die Matrix $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Berechnen Sie C^{-1}.

(b) Die Tupel

$$\mathcal{B}^{(4)} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}^{(3)} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

sind die Standardbasen der $\mathbb{Q}$-Vektorräume $M(4 \times 1, \mathbb{Q})$ und $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$. Die Tupel

$$\mathcal{A} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

sind andere Basen von $M(4 \times 1, \mathbb{Q})$ beziehungsweise von $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$. Geben Sie (ohne Begründung) die Basiswechselmatrizen $M(\mathcal{B}^{(3)}, \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{(3)})$ und $M(\mathcal{B}^{(4)}, \mathcal{A})$ an. ($M(\mathcal{A}, \mathcal{B}^{(4)})$ brauchen Sie nicht zu bestimmen.)

(c) Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung f

$$\begin{aligned} f : M(4 \times 1, \mathbb{Q}) &\longrightarrow M(3 \times 1, \mathbb{Q}), \\ x &\longmapsto D \cdot x \end{aligned}$$

wobei $D \in M(3 \times 4, \mathbb{Q})$ durch

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie $M(\mathcal{B}^{(3)}, f, \mathcal{B}^{(4)})$ und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$.

Abgabe bis Donnerstag, den 31. Oktober 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5