Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(2 Punkte)* Die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/10}$ erfüllt $0 = \zeta^5 + 1 = (\zeta+1)(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1)$, wegen $\zeta + 1 \neq 0$ also auch $0 = \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1$. Und natürlich ist $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{10}$.

   Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ ab, die von $2\cos\frac{2\pi}{10}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $2\cos\frac{2\pi}{10}$ aus.

   Bemerkungen: Wegen dieser Formel kann man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Zahl $2\cos\frac{2\pi}{10}$ heißt goldener Schnitt.

2. *(3 Punkte)* Gegeben sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,

$$v_0 := (0,0,0),\ v_1 := (1,0,0),\ v_2 := (0,1,0),\ v_3 := (0,0,1),\ v_4 := (1,2,0),$$
$$v_5 := (0,-1,3),\ v_6 := (1,1,1),\ v_7 := (-2,-4,0),\ v_8 := (1,1,0),$$

   die folgenden Indexmengen

$$I_1 := \{0,1,4,8\}, \quad I_2 := \{2,3,4,6,7\}, \quad I_3 := \{0,1,2,3,4,5\},$$

   und die Unterräume $V_k := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_j)_{j\in I_k}$ des $\mathbb{R}^3$ für $k = 1,2,3$. Bestimmen Sie Teilmengen $J_k \subset I_k$ mit der Eigenschaft, daß $(v_j)_{j\in J_k}$ eine Basis von V_k ist und schreiben Sie die Vektoren v_i, $i \in I_k - J_k$, als Linearkombinationen der Vektoren v_j, $j \in J_k$. (Hinweis: Die Teilmengen J_k sind nicht eindeutig. Sie können wählen.)

3. *(3 Punkte)* Betrachten Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$v_{1,t} := (2,1), \quad v_{2,t} := t\cdot(t^2,2), \quad v_{3,t} := t\cdot(t,1),$$

   im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und die Untervektorräume

$$V_{1,t} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_{1,t}, v_{2,t}) \quad \text{und} \quad V_{2,t} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_{1,t}, v_{2,t}, v_{3,t}).$$

   Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}} V_{1,t}$ und $\dim_{\mathbb{R}} V_{2,t}$. (Hinweis: Fallunterscheidungen.)

4. *(4 Punkte)* (In dieser Aufgabe werden Sie den ersten Teil von Satz 2.11 beweisen.) Sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p (p ist eine Primzahl, siehe Definition/Lemma 2.16). Zeigen Sie:

   (a) K ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

   (b) Die Ordnung von K ist eine Potenz von p.

   (Hinweise: K ist nach (a) ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Weil K endlich ist, hat K auch ein endliches Erzeugendensystem und eine endliche Basis.)

5. *(4 Punkte)* Sei V ein Vektorraum über K, und seien W_1 und W_2 Untervektorräume von V.

   (a) Zeigen Sie, dass $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2 := \{a + b \mid a \in W_1, b \in W_2\}$ Untervektorräume von V sind.

   (b) Nun sei $\dim_K W_1 < \infty$ und $\dim_K W_2 < \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{aligned}\dim_K(W_1 \cap W_2) &< \infty, \\ \dim_K(W_1 + W_2) &< \infty \qquad \text{und} \\ \dim_K(W_1 + W_2) &= \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K(W_1 \cap W_2)\end{aligned}$$

   gelten.

   Für diese Aufgabe braucht man unter anderem folgende Aussagen des Vorlesungsskripts, die in der Vorlesung noch nicht bewiesen (Satz 3.17) oder noch nicht einmal formuliert worden waren (Satz 3.19).

   Satz/Definition 3.17: (a) (Satz) Hat ein Vektorraum eine endliche Basis, so sind alle Basen endlich und haben gleich viele Elemente.

   (b) (Definition) Die Dimension eines K-Vektorraums V ohne endliche Basis ist ∞. Die Dimension eines K-Vektorraums mit einer endlichen Basis ist die Anzahl der Elemente einer Basis. Notation: $\dim_K V \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

   (c) (Satz) Ist U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V, so ist $\dim U \leq \dim V$.

   Satz 3.19 (Basisergänzungssatz):

   Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\dim_K V = n$. Sei $(w_1, ..., w_k)$ eine linear unabhängige Familie in V mit $k \leq n$.

   Dann gibt es $w_{k+1}, ..., w_n$, so daß $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis von V ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 10. Oktober 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5