Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+1 Punkte)* Geben Sie im Fall des Körpers $K = \mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}_7$ und im Fall des Körpers $K = \mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$ für jedes Element ungleich 0 das multiplikative Inverse an, am besten jeweils in Form von einer Tabelle, in der oben die Elemente in $K - \{0\}$ und unten ihre multiplikativen Inversen stehen. Begründungen sind nicht nötig.

2. *(2+1 Punkte)*

   (a) Rechnen Sie für die folgenden 5 Polynome die Gestalt $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ aus,

   $$\begin{aligned} f_1(x) &:= (x - e^{2\pi i/3})(x - e^{2\pi i \cdot 2/3}),\ f_1(x) \cdot (x-1), \\ f_2(x) &:= (x - e^{2\pi i/6})(x - e^{2\pi i \cdot 5/6}),\ f_2(x) \cdot (x+1), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot (x-1) \cdot (x+1). \end{aligned}$$

   Hinweise: Die Polynome sind in $\mathbb{Z}[x]$. Es ist $e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Am besten macht man sich bei allen 4 Nullstellen von f_1 und f_2 ihre Lage im Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ klar und bestimmt so ihren Real- und Imaginärteil.

   (b) Sei p eine Primzahl und $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ der Körper $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ (mit p Elementen). Das Polynom

   $$f(x) := x(x-1) \cdot ... \cdot (x-(p-1)) = \prod_{k=0}^{p-1} (x-k)$$

   erfüllt offenbar$f \neq 0$, aber $f(r) = 0$ für alle $r \in K$.
   Rechnen Sie in den Fällen $p = 3$ und $p = 5$ die Gestalt $a_p x^p + ... + a_1 x + a_0$ (d.h. die Koeffizienten $a_p, ..., a_1, a_0$) des Polynoms $f(x)$ aus.

3. *(3 Punkte)* Beweisen Sie für komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung

   $$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

   Hinweis: Äquivalent ist $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.

4. *(2+1+1 Punkte)*

   (a) Geben Sie den Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen an:

   $$z_1 := \frac{1}{i}, \quad z_2 := -\frac{1-i}{1+i} + \frac{2-4i}{3}, \quad z_3 := \frac{(1+i)^2}{4} - \frac{6-3i}{i^3}, \quad z_4 := (1+i)^2(1-i)^2.$$

(b) Sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Zeigen Sie $\zeta^2 = c$ für

$$\zeta := \sqrt{\frac{1}{2}(a + |c|)} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}(-a + |c|)}.$$

(c) Geben Sie von folgenden Zahlen den Realteil und den Imaginärteil an:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2019} \quad \text{und} \quad e^{\pi i} + e^{-\pi i}.$$

5. *(4 Punkte) Gamows Rätsel.* Einst fand ein junger Abenteurer auf dem Dachboden seines Großvaters ein altes Pergament:

> *Sail to $\blacksquare$ North latitude and $\blacksquare$ West longitude where thou wilt find a deserted island. There lieth a large meadow, not pent, on the north shore of the island where standeth a lonely oak and a lonely pine. There thou wilt also see an old gallows on which we once wont to hang traitors. Start thou from the gallows and walk to the oak counting thy steps. At the oak thou must turn right by a right angle and take the same number of steps. Put here a spike in the ground. Now must thou return to the gallows and walk to the pine counting thy steps. At the pine thou must turn left by a right angle and see that thou takest the same number of steps, and put another spike into the ground. Dig halfway between the spikes; the treasure is there.*

Der junge Abenteurer segelte umgehend zur angegebenen Position. Zwar traf er auf der Insel die Bäume wie beschrieben an, doch einen Galgen fand er nicht vor. Dieser war wohl bereits verrottet. Unverrichteter Dinge machte sich der junge Abenteuer wieder auf den Heimweg. Welch ein Fehler!

Beweisen Sie, dass die Beschreibung des alten Pergaments unabhängig von der Position des Galgens zum Schatz führt. (*Hinweis:* Stellen Sie die Positionen des Galgens und der Bäume in der komplexen Zahlenebene dar und formulieren Sie die Wegbeschreibung mittels Addition und Multiplikation komplexer Zahlen.)

Abgabe bis Mittwoch, den 02. Oktober 2019, um 15:20 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5