Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Khadija Larabi

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(2 Punkte)* Ohne Beweis: Die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$ ist mit der Addition und Multiplikation reeller Zahlen ein Körper, und jedes Element läßt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben. Das multiplikative Inverse eines Elementes $a + b\sqrt{2}$ mit $(a, b) \neq 0$ ist

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

Bringen Sie die folgenden Elemente in die Gestalt $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

$$(3 + 5\sqrt{2}) \cdot (7 - 4\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2} - 1)^4, \quad \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{2}^{101}}{2 + \sqrt{2}}.$$

2. *(3+1 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie, dass die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ der einzige Körper*automorphismus* des Körpers $\mathbb{Q}$ ist (d.h. ein Körperisomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$).
   Hinweise: Sei $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ein Körperautomorphismus.

   i. Sie können die folgenden Aussagen benutzen: ψ ist injektiv; $\psi : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ und $\psi : (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ sind Gruppenhomomorphismen; es ist $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) = 1$.

   ii. Was ist $\psi(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$, was ist $\psi(\frac{n}{m})$ für $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$?

   (b) Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ hat neben id einen weiteren Körperautomorphismus. Erraten Sie ihn und geben Sie ihn an. Begründungen sind nicht nötig (die Lösung läßt sich daher in einer Zeile hinschreiben).

3. *(2 Punkte)* Sei $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, und sei für $c \in \mathbb{Z}$ $[c]_m \in \mathbb{Z}_m$ der Rest, der bei Division von c durch m bleibt. In der Vorlesung war gezeigt, dass $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ mit der Addition $a +_m b := [a + b]_m$ und der Multiplikation $a \cdot_m b := [a \cdot b]_m$ ein kommutativer Ring ist. Die Verknüpfungstafeln der beiden Verknüpfungen $+_5$ und $\cdot_5$ im Fall von $\mathbb{Z}_5$ sind

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Geben Sie die Verknüpfungstafeln der Addition und der Multiplikation auf $\mathbb{Z}_6$ an. Begründungen sind nicht nötig.

4. *(1+3 Punkte)*

   (a) Sei $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1, und sei I eine beliebige nichtleere Menge. Hier sind 2 Notationen für eine Menge, die Notation R^I ist die elegantere:
   $$R^I := \{f : I \to R \,|\, f \text{ Abbildung}\} =: \text{Abb}(I,R).$$
   Auf der Menge R^I werden zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ definiert: für $f,g \in R^I$ ist
   $$\begin{aligned} f \oplus g : I \to R \quad &\text{mit } (f \oplus g)(i) := f(i) + g(i) \text{ für } i \in I, \\ f \odot g : I \to R \quad &\text{mit } (f \odot g)(i) := f(i) \cdot g(i) \text{ für } i \in I. \end{aligned}$$
   Behauptung: Das Tripel $(R^I, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.
   Zum Beweis der Behauptung muß man nur alle Eigenschaften *punktweise* nachprüfen, und punktweise folgen sie leicht aus den analogen Eigenschaften des Rings $(R,+,\cdot)$. Zum Beispiel muß man für das eine Distributivgesetz bloß
   $$(f \odot g \oplus f \odot h)(i) = (f \odot (g \oplus h))(i) \text{ für } f,g,h \in R^I \text{ und } i \in I$$
   zeigen. Führen Sie jeden Schritt der Rechnung aus, die diese Gleichung zeigt.
   Bemerkungen: (i) Die Lösung dieser Teilaufgabe sollte nur wenige Zeilen brauchen.
   (ii) Später werden $\oplus$ und $\odot$ auch einfach mit $+$ und $\cdot$ bezeichnet. Nur hier werden sie anders benannt, um sie von den Verknüpfungen auf R zu unterscheiden.

   (b) Im Beispiel 2.3 (i) der Vorlesung war für eine nichtleere Menge M die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ mit den Verknüpfungen $\ominus$ und $\cap$ mit
   $$B \ominus C := (B \cup C) - (B \cap C)$$
   betrachtet worden.
   Geben Sie eine Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{Z}_2^M$ an, die bijektiv ist und
   $$\mathcal{A}(B \ominus C) = \mathcal{A}(B) \oplus \mathcal{A}(C) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}(B \cap C) = \mathcal{A}(B) \odot \mathcal{A}(C)$$
   erfüllt, und zeigen Sie, dass sie diese Eigenschaften erfüllt.
   Bemerkung: Wegen Teil (a) ist $\mathbb{Z}_2^M$ ein kommutativer Ring mit 1. Aus den Eigenschaften von $\mathcal{A}$ folgt, dass $(\mathcal{P}(M), \ominus, \cap)$ ein zu $\mathbb{Z}_2^M$ isomorpher kommutativer Ring mit 1 ist. (Nun sieht er gar nicht mehr so exotisch aus.)

5. *(2+2 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie, dass das Produkt $G_1 \times G_2$ zweier Gruppen $(G_1, *)$ und $(G_2, \odot)$ eine natürliche Gruppenstruktur hat.

   (b) Im folgenden meint $\mathbb{Z}_m$ die Gruppe $(\mathbb{Z}_m, +_m)$.
   Sind die Gruppen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_4$ isomorph?
   Sind die Gruppen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_6$ isomorph?

Abgabe bis Donnerstag, den 26. September 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5