Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+4 Punkte)*

   (a) Die *Ordnung* einer zyklischen Permutation $\varphi = (a_1 \, ... \, a_k)$ ist k.
   Seien $\sigma_1, ..., \sigma_b \in S_n$ $(n \geq 2, b \geq 1)$ zyklische Permutationen mit den Ordnungen $k_1, ..., k_b$, und sei
   $$\sigma = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_b.$$
   Leiten Sie aus dem Satz 1.13 der Vorlesung eine Formel ab, die $\mathrm{sign}(\sigma)$ mit Hilfe der Ordnungen $k_1, ..., k_b$ ausdrückt.

   (b) Schreiben Sie die folgenden Permutationen $\psi_1, .., \psi_4 \in S_8$ als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und bestimmen Sie mit Hilfe von (a) $\mathrm{sign}(\psi_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.
   $$\begin{aligned}
   \psi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \\
   \psi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
   \psi_3 &= (1\ 3\ 5)(2\ 5\ 4\ 3)(7\ 8), \\
   \psi_4 &= (1\ 2\ 3\ 4)(4\ 5\ 6)(6\ 7\ 8).
   \end{aligned}$$

2. *(1+2+1 Punkte)*

   (a) Neben id gibt es in S_4 vier Typen von Produkten von Zykeln mit disjunkten Trägern. Einer ist $(ab)(cd)$, und wegen Aufgabe 1 (a) oder Satz 1.13 ist das Signum bei diesem Typ $+1$. Geben Sie die anderen drei Typen und jeweils das Signum an.

   (b) Schreiben Sie die 24 Elemente der Gruppe S_4 auf, und zwar bis auf das neutrale Element $\mathrm{id} \in S_4$ alle als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern. Geben Sie jeweils das Signum an.

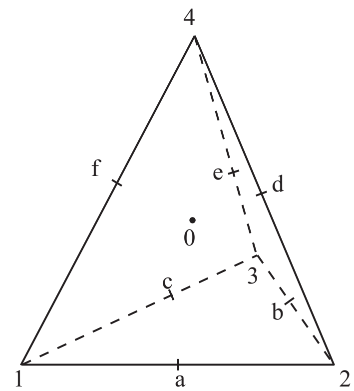
   (c) Sei $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

(i,j)	$(\sigma(i), \sigma(j))$	Fehlstand
$(1,2)$	$(3,2)$	ja
$(1,3)$		
$(1,4)$		
$(1,5)$		
$(2,3)$		
$(2,4)$		
$(2,5)$		
$(3,4)$		
$(3,5)$		
$(4,5)$		

3. *(3 Punkte)*

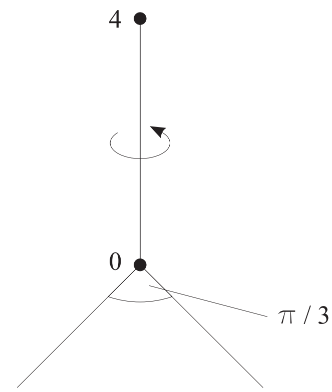
Diese Aufgabe setzt die richtige Bearbeitung der Aufgabe 2 (b) voraus, denn hier sollen die Elemente der Gruppe $A_4 := \{\sigma \in S_4 \mid \operatorname{sign}(\sigma) = +1\}$ geometrisch realisiert werden.

T sei ein gleichseitiges Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0, Ecken $1, 2, 3, 4$ und Kantenmittelpunkten a, b, c, d, e, f wie in der Skizze.



Einige Fakten (die Sie hier nicht beweisen müssen): Jede Drehung von T gibt eine Bijektion der Eckenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ auf sich; diese Bijektion ist in A_4. Alle Elemente von A_4 werden so realisiert.

Achtung: Um eine Drehung zu charakterisieren, braucht man eine orientierte Drehachse (nur beim Drehwinkel π ist die Orientierung egal) und einen Drehwinkel. Zum Beispiel geben die Achse $\overrightarrow{04}$ und der Winkel $\frac{\pi}{3}$ die folgendermaßen skizzierte Drehung.



Hier ist der Beginn einer Tabelle, die beschreiben soll, welche Drehung des Tetraeders welche Permutation in A_4 realisiert. Ergänzen Sie 10 Zeilen mit Drehungen und Permutationen. Die Tabelle alleine reicht. Begründungen sind nicht nötig.

Drehachse	&	Winkel	Permutation in A_4
beliebige Achse	&	0	$\mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}}$
$\overrightarrow{04}$	&	$\frac{2\pi}{3}$	(123)
$\vdots$	&	$\vdots$	$\vdots$

4. *(2+2 Punkte)*

   (a) Sei G eine Gruppe. Für ein $g \in G$ sei $\phi_g \colon G \to G$ definiert durch $\phi_g(h) := ghg^{-1}$. Zeigen Sie, daß ϕ_g ein Gruppenisomorphismus ist.

   (b) Sei G eine Gruppe. Das Paar $(\operatorname{Bij}(G, G), \circ)$ ist nach Satz 1.5 eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$G \to \operatorname{Bij}(G, G), \quad a \mapsto l_a = (\text{Linksmultiplikation mit } a)$$

   ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Bemerkung: Teil (b) zeigt, dass jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 19. September 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5