Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(5 Punkte)* Geben Sie in einer Tabelle (wie in der Vorlesung) an, ob die folgenden 5 Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Bitte geben Sie zu jeder der 5 Abbildungen eine kurze Begründung (eine bis drei Zeilen).

$$f_1 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^7;$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to (0,1], \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{es ist } (0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\});$$
$$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1);$$
$$f_4 : S_{10} \to \{1, ..., 10\}, \quad \sigma \mapsto \sigma(1);$$
$$f_5 : \{(a,b) \mid a, b \in \{1, ..., 10\}, a \neq b\} \to S_{10}, \quad (a,b) \mapsto (ab);$$

(ab) ist die Permutation, die a und b vertauscht und alle anderen Elemente festlässt.

2. *(4 Punkte)* Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen.
   (a) Es sei $g \circ f$ injektiv. Zeigen Sie, dass f injektiv ist. Folgt auch, dass g injektiv ist? (Beweis oder Gegenbeispiel.)
   (b) Es sei $g \circ f$ surjektiv. Zeigen Sie, dass g surjektiv ist. Folgt auch, dass f surjektiv ist? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

3. *(3 Punkte)* Die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ von $\mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Ist $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] - \{0\}, \cdot)$ mit der Multiplikation $\cdot$ eine Gruppe? Geben Sie entweder einen Beweis oder zeigen Sie, welche Eigenschaft(en) verletzt ist/sind.

4. *(4 Punkte)* Es sei $\sigma \in S_8$ die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) (Vorbereitung von (b)) Bestimmen Sie für jede der Zahlen $i = 1, ..., 8$ die kleinste natürliche Zahl n mit $\sigma^n(i) = i$.
   (b) Bestimmen Sie σ^{-1}, σ^{999}, σ^{1000} und σ^{32003}.

Abgabe bis Donnerstag, den 12. September 2019, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5