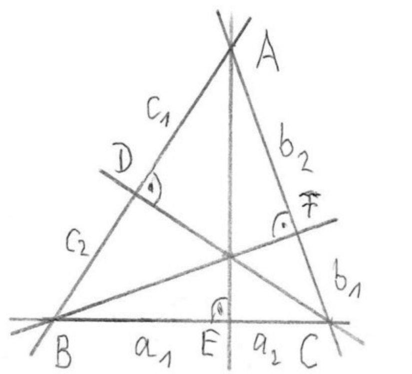
Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(4 Punkte)* **Satz 15.21:** (Satz vom Höhenschnittpunkt) Die 3 Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt P_H.



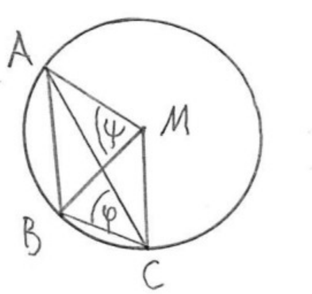
Beweisen Sie diesen Satz im Fall, wo alle Innenwinkel $< \frac{\pi}{2}$ sind, ohne den Satz von Ceva oder den Satz von Menelaos zu benutzen.

Hinweise: Wenn alle Innenwinkel $< \frac{\pi}{2}$ sind, sind die Fußpunkte D, E und F der Höhen von C, A und B im Innern der Seiten $[AB], [BC]$ und $[CA]$. Sei P_{AC} der Schnittpunkt von $G(C,D)$ mit $G(A,E)$, und sei P_{BC} der Schnittpunk von $G(C,D)$ mit $G(B,F)$. Folgende Notationen machen die Rechnungen übersichtlicher:

$$c_1 := |AD|,\ c_2 := |DB|,\ a_1 := |BE|,\ a_2 := |EC|,\ b_1 := |CF|,\ b_2 := |FA|,$$
$$h_A := |AE|,\ h_B := |BF|,\ h_C := |CD|.$$

Suchen Sie alle zu $\Delta(ADP_{AC})$ ähnlichen Dreiecke und alle zu $\Delta(BDP_{BC})$ ähnlichen Dreiecke, und finden Sie mit dem Ähnlichkeitssatz für Dreiecke Formeln für $|DP_{AC}|$ und $|DP_{BC}|$, die $|DP_{AC}| = |DP_{BC}|$ zeigen. Dann folgt $P_{AC} = P_{BC}(= P_{AB})$, und dieser Punkt ist P_H.

2. *(3 Punkte)*



Das Bild links zeigt einen Fall des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel. Hier trifft man bei mathematisch positivem Umlauf auf den Seiten des Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ die Ecken in der Reihenfolge A, B, C. Und die Sehne $[AC]$ des Kreises durch A, B und C trennt den Punkt B vom Mittelpunkt M des Kreises. Es ist $\psi := \sphericalangle AMB$ und $\varphi := \sphericalangle ACB$. Der Satz sagt $2\varphi = \psi$.

Beweisen Sie den Satz im Fall, der im Bild gezeigt ist.

3. *(4=2+2 Punkte)* Ein Polytop ist ein Schnitt von Halbräumen im $\mathbb{R}^3$, der kompakt ist und innere Punkte enthält. Dann hat man die folgenden Zahlen (für $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 3}$)

$$\begin{aligned} e &:= \text{ die Anzahl der Ecken des Polytops,} \\ e_i &:= \text{ die Anzahl der Ecken des Polytops, von denen } i \text{ Kanten ausgehen,} \\ k &:= \text{ die Anzahl der Kanten des Polytops,} \\ f &:= \text{ die Anzahl der Polygonflächen des Polytops,} \\ f_j &:= \text{ die Anzahl der Polygonflächen des Polytops, die } j \text{ Ecken haben.} \end{aligned}$$

Sie erfüllen $e - k + f = 2$ (Eulersche Polyederformel) und $2k = \sum_{i\geq 3} ie_i$, $2k = \sum_{j\geq 3} jf_j$.

(a) Bei jedem Platonischen Körper gibt es es eindeutige $m, n \in \{3, 4, 5\}$ mit $e = e_m$ und $f = f_n$. Schreiben Sie die Tabelle in Satz 16.4 ab, die bei allen 5 Platonischen Körpern m, n, e, k, f angibt, und lernen Sie sie auswendig.

(b) Sei A ein Ikosaeder mit Kantenlängen 1 im 3-dimensionalen Euklidischen Raum. An jeder Ecke wird mit einem Schnitt ein Stück abgeschnitten, so dass der Schnitt die 5 von der Ecke ausgehenden Kanten in den Punkten mit Abstand 1/3 zur Ecke durchschneidet. Man erhält ein Polytop, dessen Rand aus 12 regulären 5-Ecken und 20 regulären 6-Ecken besteht und dessen Kanten alle die Länge 1/3 haben.

Geben Sie (ohne Beweis) die Zahlen e, k, f, die Paare (i, e_i) mit $e_i \neq 0$ und die Paare (j, f_j) mit $f_j \neq 0$ an. Schreiben Sie die Gleichungen $e - k + f = 2$, $2k = \sum_i ie_i$ und $2k = \sum_j jf_j$ mit den konkreten Zahlenwerten hin.

4. *(5 Punkte)* **Definition:** Ein *Dreieckspolytop* ist ein Polytop (d.h. ein kompaktes konvexes Polyeder mit inneren Punkten), so dass alle Flächen in seinem Rand reguläre (d.h. gleichseitige) Dreiecke sind. (Dann sind automatisch alle Kanten gleich lang.)

Satz: *Es gibt nach Wahl der Kantenlänge bis auf Drehungen und Verschiebungen genau 8 Dreieckspolytope.*

3 der 8 Dreieckspolytope kennen Sie schon: das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder. Von den anderen 5 sind 2 leicht zu raten, 2 sind mittelschwer und eins ist schwer zu finden.

Raten Sie die anderen 5 Dreieckspolytope und beschreiben Sie sie durch eine Mischung aus Skizzen und Text hinreichend genau. Existenz und/oder Eindeutigkeit müssen Sie nicht beweisen.

Abgabe bis Montag, den 25. Mai 2020, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils in A5 oder gescannt auf ILIAS.