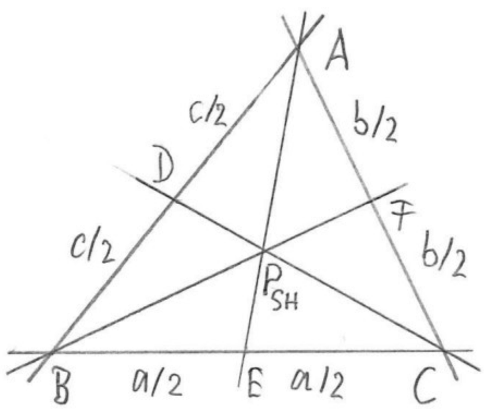
Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI — Blatt 5
Prof. Dr. Claus Hertling — 11.05.2020

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(4 Punkte)* **Satz 15.20:** (Satz vom Seitenhalbierendenschnittpunkt)

   (a) Die 3 Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt P_{SH}.

   (b) Dieser Punkt teilt jede Seitenhalbierende von der Ecke aus gesehen im Verhältnis $2:1$.



   Beweisen Sie diesen Satz, ohne den Satz von Ceva oder den Satz von Menelaos zu benutzen.

   Hinweise: Wie im Bild sei $D \in [Ab]$ und $E \in [BC]$ und $F \in [CA]$ jeweils der Mittelpunkt der genannten Seite des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$. Sei P_{AC} der Schnittpunkt von $G(C, D)$ mit $G(A, E)$, und sei P_{BC} der Schnittpunkt von $G(C, D)$ mit $G(B, F)$. Für (a) reicht es, $P_{AC} = P_{BC}$ zu zeigen. Dafür reicht es, einen Teil von (b) zu zeigen, nämlich

$$\frac{CP_{AC}}{P_{AC}D} = 2 = \frac{CP_{BC}}{P_{BC}D}.$$

   Der orientierte Strahlensatz darf (und muss mehrfach) benutzt werden.

2. *(4=2+2 Punkte)* Ein *Pythagoras-Tripel* ist ein Tripel $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ natürlicher Zahlen mit $a^2+b^2=c^2$. Es heißt primitiv, falls $\operatorname{ggT}(a,b,c)=1$ ist. Auf der Menge aller Pythagoras-Tripel wird folgende Äquivalenzrelation $\sim_P$ eingeführt:

$$(a,b,c) \sim_P (d,e,f) \iff \exists\, q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ mit } (a,b,c)=(qd,qe,qf).$$

Man sieht leicht, dass es in jeder Äquivalenzklasse von Pythagoras-Tripeln genau ein primitives Pythagoras-Tripel gibt.

Folgende Abbildungen geben eine transparente Konstruktion aller (Äquivalenzklassen von) Pythagoras-Tripeln.

$$\begin{array}{ccccc}
\{\text{Pythagoras-Tripel}\}/\sim_P & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & S^1 \cap \mathbb{Q}^2_{>0} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} &]0,1[\cap\mathbb{Q}_{>0}, \\
[(a,b,c)] & \longmapsto & (\frac{a}{c},\frac{b}{c})=(x,y) & \overset{f}{\longmapsto} & \frac{y}{1+x} \\
[(v^2-u^2,2uv,u^2+v^2)] & \longleftarrow & \left(\frac{v^2-u^2}{u^2+v^2},\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right) & \overset{g}{\longleftarrow} & \frac{u}{v}=t
\end{array}$$

Satz 15.10 (c) sagt, dass man aus $(u,v)\in\mathbb{N}^2$ mit $u<v$ und $\operatorname{ggT}(u,v)=1$ ein Pythagoras-Tripel $(v^2-u^2,2uv,u^2+v^2)$ erhält, das entweder primitiv ist oder das nach Division durch 2 ein primitives Pythagoras-Tripel liefert. Nun sagt das Diagramm oben, dass man auf diese Weise jedes primitive Pythagoras-Tripel erhält.

(a) Rechnen Sie nach, dass $f\circ g=\mathrm{id}$ und $g\circ f=\mathrm{id}$ ist.

(b) Es gibt 14 primitive Pythagoras-Tripel $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$ mit $c\le 50$. Listen Sie die 14 Werte (u,v) und die zugehörigen primitiven Pythagoras-Tripel (a,b,c) mit $c\le 50$ auf.

3. *(4 Punkte)* Geben Sie 4 verschiedene Bedingungen dafür an, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Bei den Bedingungen soll man nichts weglassen dürfen. Sie sollen als Gleichheit von gewissen Längen oder Winkeln formuliert sein. Machen Sie ohne Kommentar zu jeder Bedingung eine kleine, aber aussagekräftige Skizze.

4. *(4 Punkte)* Gegeben seien ein Dreieck $\Delta(A,B,C)$ und ein Punkt P im Inneren des Dreiecks. Es werden die Geraden $G(A,P)$, $G(B,P)$ und $G(C,P)$ betrachtet. Die Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden Seiten werden A', B' und C' genannt. Zeigen Sie

$$\frac{|AP|}{|AA'|}+\frac{|BP|}{|BB'|}+\frac{|CP|}{|CC'|}=2.$$

Hinweis: Überraschenderweise hat die Aufgabe eine elegante Lösung, die das Verhältnis $|AP|/|AA'|$ mit dem Verhältnis der Flächen der Dreiecke $\Delta(P,B,C)$ und $\Delta(A,B,C)$ verknüpft.

Abgabe bis Montag, den 18. Mai 2020, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils in A5 oder gescannt auf ILIAS