

[1] D, E, F, P_{AC} und P_{BC} sind wie in der Aufgabenstellung definiert. Man erhält

$$\frac{AB}{DB} = 2 = \frac{CB}{EB}$$

Mit dem entsprechenden Strahlensatz folgt, daß $G(A, C)$ und $G(D, E)$ parallel sind, und es folgt

$$\frac{AC}{DE} = 2$$

Aus der Parallelität von $G(A, C)$ und $G(D, E)$ und dem entsprechenden Strahlensatz mit dem $\frac{AC}{DE} = 2$ folgt

$$\frac{AP_{AC}}{P_{AC}E} = \frac{CP_{AC}}{P_{AC}D} = \frac{AC}{DE} = 2$$

Analog folgt

$$\frac{BP_{BC}}{P_{BC}F} = \frac{CP_{BC}}{P_{BC}D} = \frac{BC}{DF} = 2$$

Am $\frac{CP_{AC}}{P_{AC}D} = \frac{CP_{BC}}{P_{BC}D}$ folgt $P_{AC} = P_{BC} = P_{SH}$, also (a).

(b) sagt $2 = \frac{CP_{SH}}{P_{SH}D} = \frac{AP_{SH}}{P_{SH}E} = \frac{BP_{SH}}{P_{SH}F}$

und das ist nun auch schon bewiesen. \square

[2] Siehe Satz 2.5.10. Die 4 Beweismethoden



(Satz 2.5.10)



(Satz 2.5.11)



(Satz 2.5.11)



(Satz 2.5.12)

[2] (a) $f: S^1 \cap \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow]0, 1[\cap \mathbb{Q}_{>0}, f(x, y) = \frac{y}{1+x}$
 $g:]0, 1[\cap \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow S^1 \cap \mathbb{Q}_{>0}, g(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$

$$(f \circ g)(t) = \frac{2t/(1+t^2)}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{(1+t^2) + (1-t^2)} = t$$

$$(g \circ f)(x, y) = \left(\frac{1 - \left(\frac{y}{1+x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{1+x}\right)^2}, \frac{2 \cdot \frac{y}{1+x}}{1 + \left(\frac{y}{1+x}\right)^2} \right) = \left(\frac{(1+x)^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2}, \frac{2(1+x)y}{(1+x)^2 + y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1+2x+x^2-y^2}{1+2x+x^2+y^2}, \frac{2y+2xy}{1+2x+x^2+y^2} \right) \stackrel{x^2+y^2=1}{=} \left(\frac{2x+2x^2}{2+2x}, \frac{2y+2xy}{2+2x} \right)$$

$$= (x, y)$$

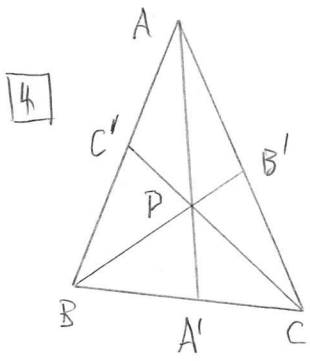
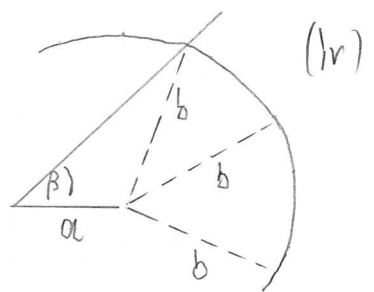
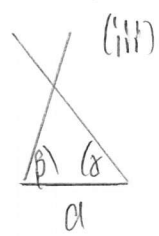
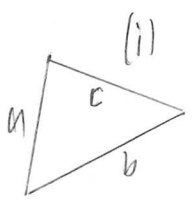
□

(b)	(u, v)	$(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$	(u, v)	$(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$
	(1, 2)	(3, 4, 5)	(2, 3)	(5, 12, 13)
	(1, 3)	(8, 6, 10) \sim_p (4, 3, 5)	(2, 5)	(21, 20, 29)
	(1, 4)	(15, 8, 17)	(3, 4)	(7, 24, 25)
	(1, 5)	(24, 10, 26) \sim_p (12, 5, 13)	(3, 5)	(16, 30, 34) \sim_p (8, 15, 17)
	(1, 6)	(35, 12, 37)	(3, 7)	(40, 42, 58) \sim_p (20, 21, 29)
	(1, 7)	(48, 14, 50) \sim_p (24, 7, 25)	(4, 5)	(9, 40, 41)
	(1, 8)	(80, 16, 82) \sim_p (40, 8, 41)	(5, 7)	(24, 70, 74) \sim_p (12, 35, 37)

$v(2^2+3^2) = 5$ $v(2^2+5^2) = 13$ $v(2^2+7^2) = 29$ $v(2^2+9^2) = 58$
 $v(3^2+4^2) = 17$ $v(3^2+5^2) = 34$ $v(3^2+7^2) = 58$ $v(3^2+8^2) = 73$
 $v(4^2+5^2) = 41$ $v(4^2+7^2) = 65$ $v(4^2+8^2) = 80$ $v(4^2+9^2) = 97$
 $v(5^2+6^2) = 61$ $v(5^2+7^2) = 85$ $v(5^2+8^2) = 109$ $v(5^2+9^2) = 136$
 $v(6^2+7^2) = 85$ $v(6^2+8^2) = 109$ $v(6^2+9^2) = 136$ $v(6^2+10^2) = 166$
 $v(7^2+8^2) = 113$ $v(7^2+9^2) = 145$ $v(7^2+10^2) = 178$ $v(7^2+11^2) = 214$
 $v(8^2+9^2) = 145$ $v(8^2+10^2) = 185$ $v(8^2+11^2) = 229$ $v(8^2+12^2) = 277$
 $v(9^2+10^2) = 181$ $v(9^2+11^2) = 229$ $v(9^2+12^2) = 285$ $v(9^2+13^2) = 346$
 $v(10^2+11^2) = 229$ $v(10^2+12^2) = 285$ $v(10^2+13^2) = 346$ $v(10^2+14^2) = 413$

[FSS 2020 LA II b Lösung von Blatt 5]

- 3] 2 Dreiecke sind kongruent, falls eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist.
- (i) Die Längen ihrer 3 Seiten stimmen paarweise überein (SSS-Satz).
 - (ii) Die Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel stimmen überein (SWS-Satz).
 - (iii) Die Länge einer Seite und die beiden daran angrenzenden Winkel stimmen überein (WSW-Satz).
 - (iv) Die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein (Satz ohne Namen).



$\text{vol}(\Delta(A, B, C)) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot | \text{Höhe von } A \text{ auf } \overline{BC} |$
 $\text{vol}(\Delta(P, B, C)) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot | \text{Höhe von } P \text{ auf } \overline{BC} |$

$\frac{\text{vol}(\Delta(P, B, C))}{\text{vol}(\Delta(A, B, C))} = \frac{| \text{Höhe von } P \text{ auf } \overline{BC} |}{| \text{Höhe von } A \text{ auf } \overline{BC} |} = \frac{|PA'|}{|AA'|}$

$1 = \frac{\text{vol}(\Delta(A, B, C))}{\text{vol}(\Delta(A, B, C))} = \frac{\text{vol}(\Delta(P, B, C))}{\text{vol}(\Delta(A, B, C))} + \frac{\text{vol}(\Delta(P, C, A))}{\text{vol}(\Delta(B, C, A))} + \frac{\text{vol}(\Delta(P, A, B))}{\text{vol}(\Delta(C, A, B))}$
 $= \frac{|PA'|}{|AA'|} + \frac{|PB'|}{|BB'|} + \frac{|PC'|}{|CC'|} = \frac{|AA'| - |PA|}{|AA'|} + \frac{|BB'| - |PB|}{|BB'|} + \frac{|CC'| - |PC|}{|CC'|}$
 $= 3 - \left(\frac{|PA|}{|AA'|} + \frac{|PB|}{|BB'|} + \frac{|PC|}{|CC'|} \right) \Rightarrow \text{Behauptung. } \square$