FSS 2020 LA II b Lösungen zu Blatt 5

[1] D, E, F, P_{AC} und P_{BC} sind wie in der Aufgabenstellung definiert. Man erhält

$$\frac{AB}{DB} = 2 = \frac{CB}{EB}.$$

Mit dem orientierten Strahlensatz folgt, daß $G(A,C)$ und $G(D,E)$ parallel sind, und es folgt

$$\frac{AC}{DE} = 2 .$$

Aus der Parallelität von $G(A,C)$ und $G(D,E)$ und dem orientierten Strahlensatz und aus $\frac{AC}{DE} = 2$ folgt

$$\frac{A P_{AC}}{P_{AC} E} = \frac{C P_{AC}}{P_{AC} D} = \frac{AC}{DE} = 2 ,$$

Analog folgt

$$\frac{B P_{BC}}{P_{BC} F} = \frac{C P_{BC}}{P_{BC} D} = \frac{BC}{DF} = 2 .$$

Aus $\frac{C P_{AC}}{P_{AC} D} = \frac{C P_{BC}}{P_{BC} D}$ folgt $P_{AC} = P_{BC} = P_{SH}$, also (a).

(b) sagt $2 = \frac{C P_{SH}}{P_{SH} D} = \frac{A P_{SH}}{P_{SH} E} = \frac{B P_{SH}}{P_{SH} F}$,

und das ist nun auch schon bewiesen. $\square$

$\boxed{2}$ (a) $f : S^1 \cap \mathbb{Q}^2_{>0} \to \,]0,1[\, \cap \mathbb{Q}_{>0}$, $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x}$.

$g : \,]0,1[\, \cap \mathbb{Q}_{>0} \to S^1 \cap \mathbb{Q}^2_{>0}$, $g(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2} \right)$.

$$(f \circ g)(t) = \frac{2t/(1+t^2)}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{(1+t^2)+(1-t^2)} = t .$$

$$(g \circ f)(x,y) = \left(\frac{1 - \left(\frac{y}{1+x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{1+x}\right)^2}, \frac{2 \cdot \frac{y}{1+x}}{1 + \left(\frac{y}{1+x}\right)^2} \right) = \left(\frac{(1+x)^2 - y^2}{(1+x^2)+y^2}, \frac{2(1+x)y}{(1+x)^2+y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1+2x+x^2-y^2}{1+2x+x^2+y^2}, \frac{2y+2xy}{1+2x+x^2+y^2} \right) \underset{x^2+y^2=1}{\overset{\uparrow}{=}} \left(\frac{2x+2x^2}{2+2x}, \frac{2y+2xy}{2+2x} \right)$$

$$= (x,y). \qquad \square$$

(b)

(u,v)	$(v^2-u^2, 2uv, u^2+v^2)$
$(1,2)$	$(3,4,5)$
$(1,3)$	$(8,6,10) \sim_p (4,3,5)$
$(1,4)$	$(15,8,17)$
$(1,5)$	$(24,10,26) \sim_p (12,5,13)$
$(1,6)$	$(35,12,37)$
$(1,7)$	$(48,14,50) \sim_p (24,7,25)$
$(1,9)$	$(80,18,82) \sim_p (40,9,41)$

(u,v)	$(v^2-u^2, 2uv, u^2+v^2)$
$(2,3)$	$(5,12,13)$
$(2,5)$	$(21,20,29)$
$(3,4)$	$(7,24,25)$
$(3,5)$	$(16,30,34) \sim_p (8,15,17)$
$(3,7)$	$(40,42,58) \sim_p (20,21,29)$
$(4,5)$	$(9,40,41)$
$(5,7)$	$(24,70,74) \sim_p (12,35,37)$

[FSS 2020 LA II b Lösungen von Blatt 5]

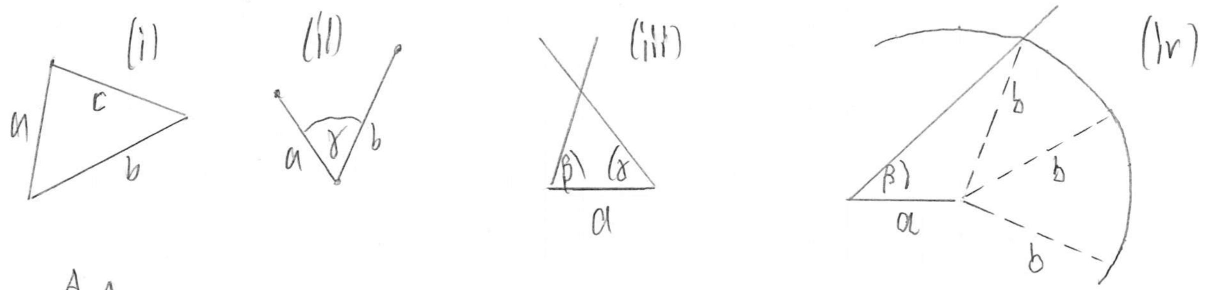
$\boxed{3}$ 2 Dreiecke sind kongruent, falls eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist.

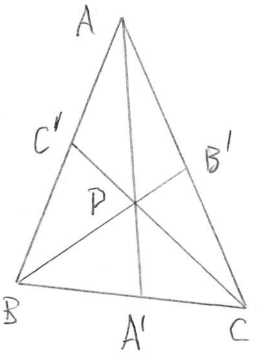
(i) Die Längen ihrer 3 Seiten stimmen paarweise überein (SSS-Satz).

(ii) Die Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel stimmen überein (SWS-Satz).

(iii) Die Länge einer Seite und die beiden daran anliegenden Winkel stimmen überein. (WSW-Satz).

(iv) Die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein (Satz ohne Namen).





$\boxed{4}$

$\mathrm{vol}(\Delta(A,B,C)) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |\text{Höhe von } A \text{ auf } G(B,C)|$,

$\mathrm{vol}(\Delta(P,B,C)) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |\text{Höhe von } P \text{ auf } G(B,C)|$.

$$\frac{\mathrm{vol}(\Delta(P,B,C))}{\mathrm{vol}(\Delta(A,B,C))} = \frac{|\text{Höhe von } P \text{ auf } G(B,C)|}{|\text{Höhe von } A \text{ auf } G(B,C)|} = \frac{|PA'|}{|AA'|}$$

$$1 = \frac{\mathrm{vol}(\Delta(A,B,C))}{\mathrm{vol}(\Delta(A,B,C))} = \frac{\mathrm{vol}(\Delta(P,B,C))}{\mathrm{vol}(\Delta(A,B,C))} + \frac{\mathrm{vol}(\Delta(P,C,A))}{\mathrm{vol}(\Delta(B,C,A))} + \frac{\mathrm{vol}(\Delta(P,A,B))}{\mathrm{vol}(\Delta(C,A,B))}$$

$$= \frac{|PA'|}{|AA'|} + \frac{|PB'|}{|BB'|} + \frac{|PC'|}{|CC'|} = \frac{|AA'|-|PA|}{|AA'|} + \frac{|BB'|-|PB|}{|BB'|} + \frac{|CC'|-|PC|}{|CC'|}$$

$$= 3 - \left(\frac{|PA|}{|AA'|} + \frac{|PB|}{|BB'|} + \frac{|PC|}{|CC'|}\right) \Rightarrow \text{Behauptung.} \quad \square$$