Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(3=1+2 Punkte)*

   (a) Geben Sie eine Charakterisierung dafür an, dass eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ *unitär* ist, bei der A^{-1} nicht hingeschrieben wird und nicht explizit gesagt wird, dass A invertierbar ist. Bemerkung: Es gibt mehrere Lösungen.

   (b) Formulieren Sie den *Spektralsatz für orthogonale Automorphismen.*

2. *(2 Punkte)* Die Seitenlängen in einem Dreieck in der Euklidischen Ebene werden a, b und c genannt. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung $a \leq b + c$. Benutzen Sie dabei die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Benutzen Sie nicht die Dreiecksungleichung für die Norm oder die Dreiecksungleichung für die Metrik (die letzte sollen Sie gerade beweisen).

   Bemerkung: Ja, der Beweis war in LA I ausgeführt worden. Sie sollen ihn sich in dieser Aufgabe noch einmal vor Augen führen. Damals war er in zwei Schritten ausgeführt worden, erst die Dreiecksungleichung für die Norm, dann die Dreiecksungleichung für die Metrik. Das können Sie hier etwas kürzer gestalten.

3. *(3 Punkte)* Die Gruppe der Isometrien der Euklidischen Geraden $(\mathbb{R}, \phi_{st})$ ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st}) &= \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes O(\mathbb{R}, \phi_{st}) = \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes \{\mathrm{id}, s_0\} \\
&= \{\text{Translationen}\} \cup \{\text{Spiegelungen}\} = \{T_a \,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{s_b \,|\, b \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

   Hier ist T_a die Translation um a, also $T_a(x) = x + a$, und s_b ist die Spiegelung am Punkt b.

   Ersetzen Sie in den folgenden Formeln die Fragezeichen durch die richtigen Formeln. Begründungen sind nicht nötig.

$$\begin{aligned}
s_b(x) &= ?, \quad s_b \circ T_a = s_?, \\
T_a \circ s_b &= s_?, \quad T_a \circ s_b = T_c \circ s_d \iff ? = ?, \\
s_b \circ T_a \circ s_b &= T_?, \quad T_a \circ s_b \circ T_{-a} = s_?.
\end{aligned}$$

4. *(6=1+2+2+1 Punkte)* **Definition:** Das *Vektorprodukt* $a \times b$ von zwei Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$ im $\mathbb{R}^3$ $(= M(1 \times 3, \mathbb{R}))$ ist

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Offensichtlich gilt für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$(a \times b) \cdot c^{tr} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b \times c) \cdot a^{tr} = (c \times a) \cdot b^{tr}.$$

Satz: *Sei ϕ_{st} das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$, und seien $a, b \in \mathbb{R}^3$.*

(a) Es ist $\phi_{st}(a \times b, a) = \phi_{st}(a \times b, b) = 0$.

(b) Es ist $a \times b = 0$ falls $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Im Fall $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt

$$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \measuredangle(a, b).$$

(c) Falls a und b linear unabhängig sind, ist $(a, b, a \times b)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Dann hat die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{E}, (a, b, a \times b))$ eine positive Determinante, d.h. die Basis $a, b, a \times b$ hat die gleiche Orientierung wie die Standardbasis $\mathcal{E} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

(d) Durch die Eigenschaften in (a)–(c) ist $a \times b$ eindeutig bestimmt.

Beweisen Sie diesen Satz.

5. *(2 Punkte)* Benutzen Sie das Vektorprodukt, um ohne Zeilenumformungen oder andere bekannte Methoden, lineare Gleichungssysteme zu lösen, direkt eine Lösung ungleich 0 des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hinzuschreiben.

Abgabe bis Montag, den 11. Mai 2020, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils in A5 oder gescannt auf ILIAS