# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(5=2+3 Punkte)* Lemma 14.13 sagt insbesondere, dass es für jeden orthogonalen Automorphismus $f \in O(V, \phi)$ eines 3-dimensionalen Euklidischen Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt $\phi$ nur zwei Möglichkeiten gibt:

   (i) Entweder ist $f$ eine Drehung $d_{v,\alpha}$ um eine Achse $\mathbb{R} \cdot v$ mit $v \in \mathrm{Eig}(f, 1) - \{0\}$. Hier bezeichnet $\alpha \in [0, 2\pi)$ den Drehwinkel der Drehung um die orientierte Drehachse $\mathbb{R} \cdot v$ mit der Orientierung gegeben durch $v$: Rechte Hand-Regel.

   (ii) Oder $f$ ist eine Drehspiegelung $f = s_E \circ d_{v,\alpha} = d_{v,\alpha} \circ s_E$ mit

   $$V = \mathbb{R} \cdot v \oplus E,\ v \in \mathrm{Eig}(f, -1),\ E = (\mathbb{R} \cdot v)^{\perp}.$$

   Hier ist $s_E$ die Spiegelung an der Ebene $E$, also $E = \mathrm{Eig}(s_E, 1)$, $\mathbb{R} \cdot v = \mathrm{Eig}(s_E, -1)$.

   Die Logik in der Vorlesung war

   Satz 14.10(a) $\Rightarrow$ Satz 14.10(b)$\Rightarrow$ Satz 14.11(a) $\Rightarrow$ Satz 14.11(b)$\Rightarrow$ Lemma 14.13.

   Tatsächlich kommt man viel schneller an die Aussagen von Lemma 14.13. Das soll in dieser Aufgabe ausgeführt werden. Sei $f \in O(V, \phi)$.

   (a) Aus Beispiel 14.5 (i) und Satz 14.3 (c) folgt $\det f = \pm 1$ (das müssen Sie nicht beweisen). Zeigen Sie, dass $\det f$ ein Eigenwert von $f$ ist.

   Hinweise: Alle Eigenwerte von $f$ sind gleich zu 1 oder $-1$. Warum? Es sind ein oder drei Eigenwerte. Denn es sind die reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$. Das hat Koeffizienten in $\mathbb{R}$, und es hat Grad 3, also hat es eine reelle und 2 konjugiert komplexe Nullstellen, oder es hat 3 reelle Nullstellen.

   (b) Zeigen Sie im Fall $\det f = 1$, dass $f$ eine Drehung ist. Zeigen Sie im Fall $\det f = -1$, dass $f$ eine Drehspiegelung ist.

   Hinweise: Man wählt einen normierten Eigenvektor $v \in \mathrm{Eig}(f, \det f) - \{0\}$. Zeigen Sie, dass $f$ die orthogonale Ebene $E := \mathrm{Eig}(f, \det f)^{\perp}$ auf sich abbildet und dass $f$ diese Ebene dreht.

   Es ist nützlich, am Ende die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ anzugeben, wobei $b_1 = v$ ist und $b_2, b_3$ eine ON-Basis von $E$ ist.

2. *(6=2+2+2 Punkte)* Aufgabe 2 ist ein Beispiel zu Aufgabe 1.

   Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Matrix $B$ orthogonal ist und die Determinante 1 hat.

   (b) Nach Lemma 14.13 beschreibt sie daher eine Drehung. Wegen $B \neq E_3$ ist es eine „echte“ Drehung (*echt*: $\neq$ id) mit bis auf die Orientierung eindeutiger Drehachse $\mathbb{R} \cdot c_1$, wobei $c_1$ ein normierter Eigenvektor von $B$ zum Eigenwert 1 ist. Nach Wahl der Orientierung ist auch der Winkel $\alpha \neq 0$ eindeutig.

   Bestimmen Sie eine $ON$-Basis $(c_1, c_2, c_3)$ von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, so dass $c_1$ ein Eigenvektor von $B$ mit Eigenwert 1 ist und $c_2$ und $c_3$ die dazu orthogonale Ebene aufspannen und so dass die orthogonale Matrix $T \in O(3, \mathbb{R})$ mit Spalten $c_1, c_2, c_3$ Determinante 1 hat, also in $SO(3, \mathbb{R})$ liegt.

   (c) Berechnen Sie $T^{-1} \cdot B \cdot T$ und geben Sie $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ des Drehwinkels $\alpha$ an.

   Bemerkungen: Es ist $T^{-1} = T^{tr}$ (hier müssen Sie also keine inverse Matrix ausrechnen). Der Winkel $\alpha$ selber ist nicht leicht angebbar, Sie sollen nur $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ angeben.

3. *(5=3+2 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie: Ist $A \in O(2, \mathbb{R})$, so ist

$$B := \begin{pmatrix} \begin{matrix} & \\ & A & \\ & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & \det A \end{pmatrix} \in SO(3, \mathbb{R}).$$

   Beschreibt $A$ eine Drehung um einen Winkel $\alpha$, so beschreibt $B$ eine Drehung an der Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3$ um den Winkel $\alpha$. Beschreibt $A$ eine Spiegelung an der Achse $c_1 e_1^{(2)} + c_2 e_2^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ (mit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$), so beschreibt $B$ eine Drehung an der Drehachse $c_1 e_1 + c_2 e_2 \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel $\pi$.

   (b) Ist $G \subset O(2, \mathbb{R})$ eine Untergruppe, so ist

$$\widetilde{G} := \{\, B := \begin{pmatrix} \begin{matrix} & \\ & A & \\ & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & \det A \end{pmatrix} \mid A \in G \,\}$$

   eine Untergruppe von $SO(3, \mathbb{R})$ und als Gruppe isomorph zu $G$.

**Abgabe bis Montag, den 04. Mai 2020, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils in A5 oder gescannt auf ILIAS**