Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(4 Punkte)* Sei V ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ und mit einer Orientierung (*Orientierung*: wenn man nur Basiswechselmatrizen mit *positiver* Determinante betrachtet, zerfällt die Menge aller Basen in 2 disjunkte Teilmengen; eine *Orientierung* ist die Wahl einer dieser beiden Mengen; der Winkel einer Drehung bestimmt sich so, dass der erste Basisvektor einer Basis in der Orientierungsklasse in Richtung des zweiten Basisvektors gedreht wird). Die Gruppe $O(V,\phi)$ der orthogonalen Automorphismen besteht aus den Drehungen um 0 und den Spiegelungen an Geraden durch 0,

$$\begin{aligned} d_\alpha &:= \text{Drehung um den Winkel } \alpha, \\ s_v &:= \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in V - \{0\}. \end{aligned}$$

Als Menge ist $O(V,\phi)$ isomorph zu $S^1 \times \{\pm 1\}$, aber als Gruppe nicht. Vielmehr ist sie ein *semidirektes Produkt* (Definition nicht hier) der Gruppen S^1 und $\{\pm 1\}$. Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht, sondern es gilt

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle zur Gruppenstruktur von $O(V,\phi)$. Der Winkel zwischen w und v soll γ genannt werden; genauer: γ ist der Winkel mit $d_\gamma(\frac{w}{\|w\|}) = \frac{v}{\|v\|}$.

$\circ$	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$	$s_v \circ s_w = d_{\dots}$

Machen Sie zu den 3 Fällen $s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$, $d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$ und $s_v \circ s_w = d_{\dots}$ je eine Skizze und beweisen Sie Ihre Formel auf der rechten Seite.

Hinweise: Der Beweis muß natürlich benutzen, wie Drehungen und Spiegelungen charakterisiert sind. Jede Drehung d_α erfüllt $\det d_\alpha = 1$, jede Spiegelung s_v erfüllt $\det s_v = -1$, und s_v hat v als Eigenvektor mit Eigenwert 1 (und einen orthogonalen Vektor als Eigenvektor mit Eigenwert -1). In den beiden Fällen $s_v \circ d_\beta$ und $d_\alpha \circ s_w$ reicht es zu zeigen, dass eine Spiegelung rauskommt, und einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 zu finden.

2. *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass es eindeutige reelle Zahlen $a, b, c, d, e, f, g, h, j$ mit $c, d, j > 0$ gibt, so dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & d & h \\ \frac{2}{3} & a & e & 0 \\ \frac{2}{3} & b & f & j \\ 0 & c & g & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

eine orthogonale Matrix ist, und bestimmen Sie diese Zahlen.

3. *(4 Punkte)* Beweisen Sie, dass folgende Abbildung eine Bijektion ist:

$$\left\{ (\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mid \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \zeta_i \in S^1,\ \begin{matrix} \zeta_2 = 1 \text{ für } \alpha = 0, \\ \zeta_1 = 1 \text{ für } \alpha = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\} \longrightarrow U(2)$$

$$(\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_1 \cos\alpha & -\zeta_3\zeta_1 \sin\alpha \\ \zeta_2 \sin\alpha & \zeta_3\zeta_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Hinweise: Wenn man die Spaltenvektoren einer unitären 2×2-Matrix a_1 und a_2 nennt, kann man zuerst die Absolutwerte der Einträge von a_1 behandeln (es ist $\|a_1\| = 1$), und dann die von a_2 (es ist $\|a_2\| = 1$ und $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$). Danach können dann die komplexen Phasen der Einträge diskutiert werden.

4. *(4 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie, dass gilt:

   $$\widetilde{SU(1,1)} := \left\{ B \in SL(2, \mathbb{C}) \mid B^{tr} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\} = SL(2, \mathbb{R}).$$

   (b) Ist die Menge

   $$Sp(2, \mathbb{R}) := \left\{ B \in SL(2, \mathbb{R}) \mid B^{tr} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   eine echte Teilmenge von $SL(2, \mathbb{R})$ oder gleich $SL(2, \mathbb{R})$?

   Hinweise: Bei (a) kann man verschieden geschickt rechnen. Wie lautet die Formel für die inverse Matrix einer 2×2-Matrix? Wenn man (a) verstanden hat, ist (b) einfach.

Abgabe bis Montag, den 27. April 2020, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils in A5 oder gescannt auf ILIAS