

# Lineare Algebra IIb Frühjahrssemester 2020

Mannheim

Claus Hertling

29.03.2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>14 Symmetrien der Ebene und des Raumes</b>	<b>160</b>
14.1 Definition von orthogonalen und unitären Automorphismen . . . . .	160
14.2 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien der Ebene . . . . .	163
14.3 Orthogonale und unitäre Automorphismen . . . . .	168
14.4 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien des Raumes . . . . .	173
14.5 Isometrien . . . . .	176
14.6 Symmetrien der Ebene und des Raumes . . . . .	181
<b>15 Geraden, Dreiecke und Kreise in der Ebene</b>	<b>187</b>
15.1 Geraden . . . . .	187
15.2 Dreiecke . . . . .	191
15.3 Kreise . . . . .	206
<b>16 Die Platonischen Körper</b>	<b>214</b>
16.1 Die Platonischen Körper . . . . .	214
16.2 Zwei Experimente zu $SU(2)$ und $SO(3, \mathbb{R})$ . . . . .	222

Die Vorlesung ist eine Fortsetzung der Vorlesungen Lineare Algebra I im HWS 2019 und Lineare Algebra IIa im FSS 2020. Daher fängt sie mit Kapitel 14 und auf Seite 159 an. Die Kapitel 14 und 16 sind aus Material im FSS 2015 entstanden, Kapitel 15 ist neu. Es können sich in Kapitel 15 und 16 noch Änderungen ergeben.

[hertling@math.uni-mannheim.de](mailto:hertling@math.uni-mannheim.de)

## 14 Symmetrien der Ebene und des Raumes

In diesem Kapitel ist  $n \in \mathbb{N}$ .

### 14.1 Definition von orthogonalen und unitären Automorphismen

**Definition 14.1** (a) Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ . Ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  heißt *unitär* bzw. *orthogonal*, falls

$$\phi(f(v), f(w)) = \phi(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

ist. Dann ist  $f$  injektiv, also ein Automorphismus von  $V$ .

(b) In der Situation von (a) ist die Menge aller unitären bzw. orthogonalen Automorphismen von  $V$  offenbar eine Gruppe. Sie wird  $U(V, \phi)$  bzw.  $O(V, \phi)$  genannt.

(c) Eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  heißt *unitär*, falls  $A$  invertierbar ist und

$$\overline{A}^{tr} = A^{-1}$$

gilt. Hier ist  $\overline{A} := (\overline{a_{ij}})$  bei  $A = (a_{ij})$ .

(d) Eine reelle Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  heißt *orthogonal*, falls  $A$  invertierbar ist und

$$A^{tr} = A^{-1}$$

gilt. Also ist eine reelle Matrix genau dann orthogonal, wenn sie (aufgefaßt als komplexe Matrix) unitär ist.

**Beispiele 14.2** Satz 14.3 (a) sagt, dass eine Matrix genau dann unitär bzw. orthogonal ist, wenn ihre Spalten eine ON-Basis von  $M(n \times 1, \mathbb{C})$  bzw.  $M(n \times 1, \mathbb{R})$  bilden. Hier sind Beispiele orthogonaler  $3 \times 3$ -Matrizen.

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

**Satz 14.3** (a) Eine Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  mit  $K = \mathbb{C}$  bzw.  $K = \mathbb{R}$  ist genau dann unitär bzw. orthogonal, wenn die Spalten eine ON-Basis von  $M(n \times 1, K)$  bezüglich des Standardskalarproduktes auf  $M(n \times 1, K)$  bilden.

(b) Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ , und sei  $f : V \rightarrow V$  unitär bzw. orthogonal. Dann erhält  $f$  das Skalarprodukt, die Norm und die Metrik auf  $V$ , also auch die Längen von Vektoren. Im reellen Fall erhält  $f$  auch die Winkel zwischen Vektoren.

(c) Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ , und sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

( $\alpha$ )  $f$  ist unitär bzw. orthogonal.

( $\beta$ ) Ist  $\mathcal{B}$  eine ON-Basis, so ist die Matrix  $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$  unitär bzw. orthogonal.

(d) Im Fall  $V = M(n \times 1, K)$  mit  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  und  $A \in M(n \times n, K)$  gilt:

$A$  ist unitär bzw. orthogonal  $\iff l_A : V \rightarrow V$  ist unitär bzw. orthogonal.

**Beweis:** (a)  $\overline{A}^{tr} = A^{-1}$  ist zu

$$A^{tr} \cdot \overline{A} = E_n$$

äquivalent. Und das ist dazu äquivalent, daß die Spalten von  $A$  eine ON-Basis von  $M(n \times 1, K)$  für  $K = \mathbb{C}$  bzw.  $K = \mathbb{R}$  bezüglich des Standardskalarproduktes bilden.

(b) Nach Definition erhält  $f$  das Skalarprodukt  $\phi$ . Es erhält die Norm wegen  $\|x\| = \sqrt{\phi(x, x)}$  und die Metrik wegen  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Im reellen Fall ist der Winkel  $\gamma \in [0, \pi]$  zwischen zwei Vektoren  $x, y \in V - \{0\}$  durch  $\phi(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \gamma$  bestimmt. Daher erhält  $f$  dann auch die Winkel.

(c) Sei  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine ON-Basis von  $V$ .

**Behauptung:**  $f$  ist unitär bzw. orthogonal  
 $\iff$  es bildet  $\mathcal{B}$  wieder auf eine ON-Basis ab.

Beweis der Behauptung:  $\implies$  folgt aus (b).

$\impliedby$ : Daß  $f \mathcal{B}$  wieder auf eine ON-Basis  $f(\mathcal{B})$  abbildet, bedeutet gerade

$$\phi(f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B})) = E_n \quad (= \phi(\mathcal{B}^{tr}, \mathcal{B})).$$

Seien  $\mathcal{B} \cdot x$  und  $\mathcal{B} \cdot y$  mit  $x, y \in M(n \times 1, K)$  beliebige Vektoren in  $V$ . Dann ist (im Fall  $K = \mathbb{C}$  hat Lemma 13.5 (a) eine komplexe Version)

$$\begin{aligned} \phi(f(\mathcal{B} \cdot x), f(\mathcal{B} \cdot y)) &= \phi((f(\mathcal{B} \cdot x))^{tr}, f(\mathcal{B} \cdot y)) = \phi(x^{tr} \cdot f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B}) \cdot y) \\ &\stackrel{13.5(a)}{=} x^{tr} \cdot \phi(f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B})) \cdot \overline{y} = x^{tr} \cdot E_n \cdot \overline{y} = x^{tr} \cdot \overline{y} \\ &= \phi(\mathcal{B} \cdot x, \mathcal{B} \cdot y). \end{aligned}$$

Also erhält  $f$  das Skalarprodukt, also ist  $f$  unitär bzw. orthogonal. Diese Rechnung drückt bloß aus, daß sich die Eigenschaft von  $f$ , das Skalarprodukt zu erhalten, aufgrund der Linearität von  $f$  von einer ON-Basis auf alle Vektoren erweitert. ( $\square$ )

Es ist  $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ , also

$$\begin{aligned} \phi(f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B})) &= \phi((\mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}))^{tr}, \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})) \\ &= M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^{tr} \cdot \phi(\mathcal{B}^{tr}, \mathcal{B}) \cdot \overline{M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})} \\ &= M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^{tr} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich  $E_n$ , wenn die Matrix  $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$  unitär bzw. orthogonal ist. Mit der Behauptung folgt  $(\alpha) \iff (\beta)$ .

(d) Das folgt aus (c) mit  $\mathcal{B}$  = Standardbasis und  $M(\mathcal{B}, l_A, \mathcal{B}) = A$ .  $\square$ .

Die abstrakte Gruppe  $U(V, \phi)$  bzw.  $O(V, \phi)$  ist zur Matrizen­gruppe  $U(n)$  bzw.  $O(n, \mathbb{R})$  isomorph, die im folgenden Punkt 14.4 definiert wird.

**Definition/Lemma 14.4** (a) (Definition)

$$\begin{aligned} U(n) &:= \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^{tr} = A^{-1}\}, \\ SU(n) &:= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} &= U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}), \\ O(n, \mathbb{R}) &:= \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{tr} = A^{-1}\} &= U(n) \cap GL(n, \mathbb{R}), \\ SO(n, \mathbb{R}) &:= \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} &= O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R}) \\ & &= U(n) \cap SL(n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(b) (Lemma) Die vier Mengen in (a) sind mit der Matrizenmultiplikation Gruppen. Man hat die Untergruppenbeziehungen

$$\begin{array}{ccccc} SO(n, \mathbb{R}) & \subset & O(n, \mathbb{R}) & \subset & GL(n, \mathbb{R}) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ SU(n) & \subset & U(n) & \subset & GL(n, \mathbb{C}). \end{array}$$

(c) (Definition)  $O(n, \mathbb{R})$  ist die orthogonale Gruppe,  $SO(n, \mathbb{R})$  ist die spezielle orthogonale Gruppe,  $U(n)$  ist die unitäre Gruppe und  $SU(n)$  ist die spezielle unitäre Gruppe.

(d) (Lemma) Sei  $V$  ein unitärer bzw. Euklidischer  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ . Sei  $\mathcal{B}$  eine ON-Basis von  $V$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} U(V, \phi) &\rightarrow U(n), & f &\mapsto M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}), \\ \text{bzw. } O(V, \phi) &\rightarrow O(n, \mathbb{R}), & f &\mapsto M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}), \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

**Beweis:** (a) und (c) Definitionen.

(b) Im Fall von  $U(n)$  muß man nachrechnen, daß mit  $A$  und  $B$  in  $U(n)$  auch  $A \cdot B$  und  $A^{-1}$  in  $U(n)$  sind:

$$\begin{aligned} A, B \in U(n) &\Rightarrow \overline{AB}^{tr} = \overline{B}^{tr} \overline{A}^{tr} = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1} \\ &\text{und } \overline{A^{-1}}^{tr} = \overline{\overline{A}^{tr}} = A = (A^{-1})^{-1} \Rightarrow AB, A^{-1} \in U(n). \end{aligned}$$

$SU(n)$ ,  $O(n, \mathbb{R})$  und  $SO(n, \mathbb{R})$  sind Gruppen, weil  $U(n)$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$  und  $SL(n, \mathbb{R})$  Untergruppen von  $GL(n, \mathbb{C})$  sind und weil der Schnitt zweier Untergruppen wieder eine Untergruppe ist.

Im Fall von  $U(n)$  und  $O(n, \mathbb{R})$  kann man alternativ auch (d) benutzen, um zu schließen, dass  $U(n)$  und  $O(n, \mathbb{R})$  Gruppen sind.

(d) Die linken Seiten sind Gruppen. Wegen Satz 14.3 (c) sind die Abbildungen wohldefiniert und bijektiv. Wegen der Regeln aus Kapitel 5 zum Übergang zwischen Endomorphismen und Matrizen,

$$M(\mathcal{A}, f \circ g, \mathcal{C}) = M(\mathcal{A}, f, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, g, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad M(\mathcal{B}, f^{-1}, \mathcal{A}) = M(\mathcal{A}, f, \mathcal{B})^{-1},$$

geht die Komposition auf der linken Seite in die Matrizenmultiplikation auf der rechten Seite über, und das Invertieren ist links und rechts auch verträglich. Daher sind die rechten Seiten auch Gruppen, und die Abbildungen sind Gruppenisomorphismen.  $\square$

**Beispiele 14.5** (i) Eine unitäre Matrix  $A$  erfüllt  $|\det A| = 1$ , eine orthogonale Matrix  $A$  erfüllt  $\det A = \pm 1$ . Beides gilt wegen

$$A^{tr} \cdot \overline{A} = E_n, \quad \text{also} \quad 1 = \det E_n = \det A^{tr} \cdot \det \overline{A} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2.$$

Ein orthogonaler Automorphismus  $f \in O(V, \phi)$  eines  $n$ -dimensionalen Euklidischen Vektorraums  $V$  ist *orientierungserhaltend*, falls  $\det f = 1$  ist, und *orientierungsumkehrend*, falls  $\det f = -1$  ist, vgl. das Ende von Kapitel 7.

(ii)  $n = 1, K = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} SO(1) &= \{E_1\} = \{(1)\} \cong \{\text{id}\} \subset O(\mathbb{R}, \phi_{st}), \\ O(1) &= \{(1), (-1)\} \\ &\cong O(\mathbb{R}, \phi_{st}) = \{\text{id}, \text{Spiegelung an } 0\}. \end{aligned}$$

(iii)  $n = 1, K = \mathbb{C}$ :  $SU(1) = \{E_1\} = \{(1)\}$ ,  
 $U(1) = \{(z) \mid z \in S^1\} \cong (\text{als Gruppe}) S^1$ .

(iv)  $n = 2, K = \mathbb{R}$ : Siehe Unterkapitel 14.2.

(v)  $n = 3, K = \mathbb{R}$ : Siehe Unterkapitel 14.4.

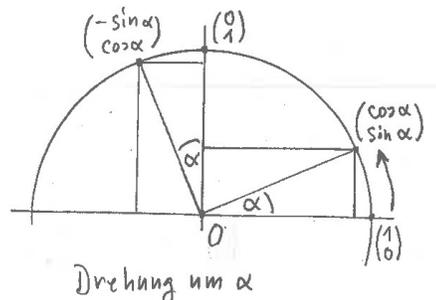
(vi)  $n = 2, K = \mathbb{C}$ : Siehe Unterkapitel 16.2.

## 14.2 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien der Ebene

**Satz 14.6** (a) Die Gruppe  $SO(2, \mathbb{R})$  der orthogonalen  $2 \times 2$  Matrizen mit Determinante 1 ist

$$\begin{aligned} SO(2, \mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\ &\cong (\text{als Gruppe}) \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in [0, 2\pi)\} = S^1 \subset \mathbb{C}. \end{aligned}$$

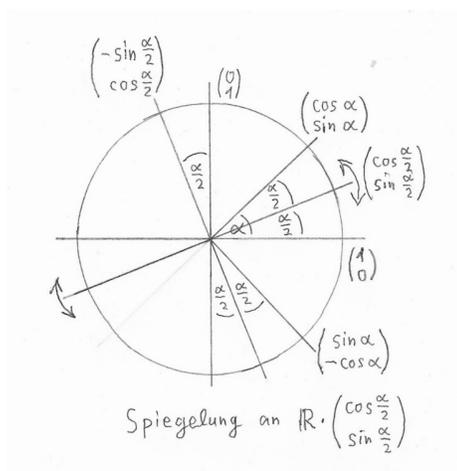
Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  ist eine Drehmatrix. Die Abbildung  $l_A : M(2 \times 1, \mathbb{R}) \rightarrow M(2 \times 1, \mathbb{R})$  ist eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  mit  $0$  als Fixpunkt.



(b) Die Gruppe  $O(2, \mathbb{R})$  enthält neben den Drehungen die 1-Parameter-Familie aller Spiegelungen an Achsen durch den Nullpunkt:

$$\begin{aligned} O(2, \mathbb{R}) &= SO(2, \mathbb{R}) \cup SO(2, \mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\ &\approx (\text{als Menge}) S^1 \dot{\cup} S^1. \end{aligned}$$

Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  ist eine Spiegelungsmatrix. Sie hat die Eigenwerte  $1$  und  $-1$ , und Eigenvektoren dazu sind die (zueinander orthogonalen) Vektoren  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ . Sie ist daher eine Spiegelung an der Geraden  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ . Sie ist orientierungsumkehrend (das paßt zu  $\det A = -1$ ).



Bei  $O(2, \mathbb{R})$  parametrisiert die eine  $S^1$  die Drehungswinkel der Drehungen; die andere  $S^1$  parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen.

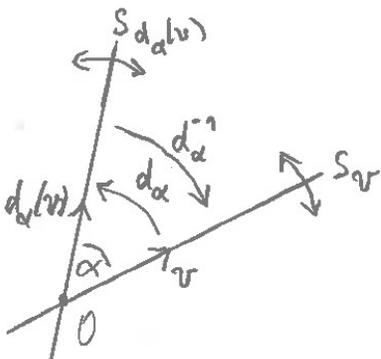
(c) Als Gruppe ist  $O(2, \mathbb{R})$  nicht isomorph zu  $S^1 \times \{\pm 1\}$ ; vielmehr ist sie ein **semidirektes Produkt** (Definition nicht hier) der Gruppen  $S^1$  und  $\{\pm 1\}$ . Denn Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht (vgl. (d)).

(d) Sei  $V$  ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ . Wegen  $O(V, \phi) \cong O(2, \mathbb{R})$  kann man auch die orthogonalen Automorphismen von  $V$  als Drehungen und Spiegelungen deuten.

$$\begin{aligned} d_\alpha &:= \text{Drehung um den Winkel } \alpha \text{ und mit Fixpunkt } 0, \\ s_v &:= \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in V - \{0\} \end{aligned}$$

Die Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht. Es gilt

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$



**Beweis:** (a) Eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$  eine ON-Basis des  $M(2 \times 1, \mathbb{R})$  bilden. Es gibt ein eindeutiges  $\alpha \in [0, 2\pi)$  mit  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ . Dann ist  $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ , also

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \pm(-\sin \alpha) \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Im Fall “+” ist das eine Drehmatrix, im Fall “-” ist es eine Spiegelungsmatrix, siehe (b).

(b) Sei  $A := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ . Offenbar ist das charakteristische Polynom

$$P_a(t) = (t - \cos \alpha)(t + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1).$$

Also sind die Eigenwerte  $\pm 1$ . Daß die Eigenvektoren so sind wie angegeben, kann man auf zwei Weisen einsehen.

1. **Weise**, Nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

(Additionstheorem von  $e^{i\alpha} \cdot e^{-i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}}$ ),

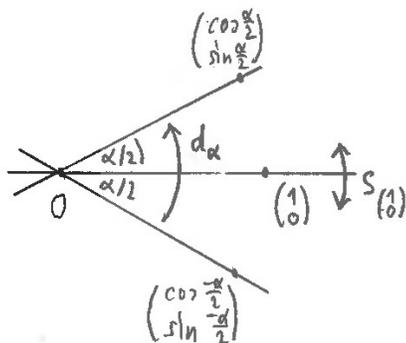
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

2. **Weise**, mit geometrischen Argumenten und der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Interpretation dieser Gleichung:** Man führt zuerst eine Spiegelung an der Geraden  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  aus, danach eine Drehung um den Winkel  $\alpha$ . Die Komposition ist eine Spiegelung an der Geraden  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ .

**Begründung:** Die Spiegelung an der Geraden  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  bildet den Vektor  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  auf den Vektor  $\begin{pmatrix} \cos \frac{-\alpha}{2} \\ \sin \frac{-\alpha}{2} \end{pmatrix}$  ab, die Drehung bildet diesen Vektor wieder auf den Vektor  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  ab. Also ist  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.



Weil  $l_A$  Winkel erhält, muß der orthogonale Vektor  $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  wieder auf einen orthogonalen Vektor abgebildet werden, also notwendigerweise auf  $\pm 1$  mal sich selber. Wegen  $\det A = -1$  ist der zweite Eigenwert  $-1$ , also wird der Vektor  $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  auf  $-1$  mal sich selber abgebildet

(c) Siehe (d).

(d)  $d_\alpha \circ s_v \circ d_{-\alpha}$  ist wegen  $\det(d_\alpha \circ s_v \circ d_{-\alpha}) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$  eine Spiegelung. Man muß bloß die Spiegelungsachse bestimmen, also einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Die folgende Rechnung paßt zur Skizze im Lemma und gibt den Eigenvektor  $d_\alpha(v)$ :

$$(d_\alpha \circ s_v \circ d_{-\alpha})(d_\alpha(v)) = (d_\alpha \circ s_v)(v) = d_\alpha(v).$$

□

**Definition 14.7** (a) Ein *reguläres*  $n$ -Eck  $A$  in einem 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum  $V$  ist ein  $n$ -Eck mit lauter gleichen Winkeln und gleichen Seitenlängen.  $A$  ist die konvexe Hülle seiner Ecken  $E_1, \dots, E_n$ :

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i \mid \lambda_j \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \subset V.$$

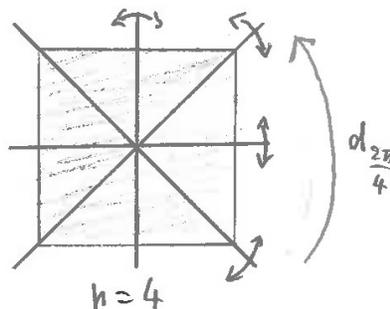
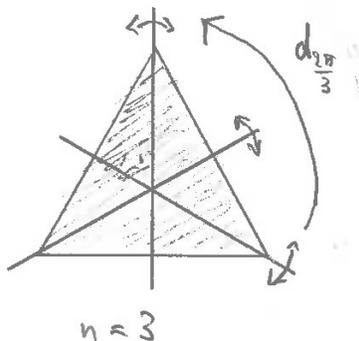
(b) Bemerkung: Die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $e^{2\pi i k/n} \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , sind die Ecken eines regulären  $n$ -Ecks. Hier sind die Kantenlängen alle gleich zu  $|1 - e^{2\pi i/n}|$ .

(c) Sei  $A$  ein reguläres  $n$ -Eck in  $M(2 \times 1, \mathbb{R})$  mit Nullpunkt als Mittelpunkt. Die Gruppe aller Symmetrien von  $A$  ist

$$\text{Sym}(A) := \{f \in O(2, \mathbb{R}) \mid f(A) = A\}.$$

Die Gruppe aller orientierungserhaltenden Symmetrien von  $A$  ist

$$\text{Sym}_{or}(A) := \{f \in SO(2, \mathbb{R}) \mid f(A) = A\}.$$



**Satz 14.8** (a) In  $SO(2, \mathbb{R})$  gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  nur eine endliche Untergruppe der Ordnung  $n$ . Es ist die Gruppe der Drehungen um die Winkel  $\frac{2\pi k}{n}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Sie ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ . Sie ist für jedes reguläre  $n$ -Eck  $A$  in  $M(2 \times 1, \mathbb{R})$  mit Mittelpunkt = 0 die Gruppe  $\text{Sym}_{or}(A)$ . Sie wird auch  $C_n^{(2)}$  genannt (der obere Index soll andeuten, dass hier Untergruppen der  $O(2, \mathbb{R})$  betrachtet werden).

(b) Die endlichen Untergruppen von  $O(2, \mathbb{R})$ , die nicht in  $SO(2, \mathbb{R})$  liegen, sind genau die Gruppen  $\text{Sym}(A)$  für die regulären  $n$ -Ecke  $A$  in  $M(2 \times 1, \mathbb{R})$  mit Mittelpunkt  $= 0$ . Die Gruppen für ein festes  $n$  sind alle konjugiert und bilden eine 1-Parameter-Familie von Gruppen. Sie haben alle  $2n$  Elemente und enthalten die Untergruppe  $C_n^{(2)}$  aller Drehungen um Winkel  $\frac{2\pi k}{n}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Diese Untergruppe ist ein Normalteiler in  $\text{Sym}(A)$ . Die weiteren Elemente sind Spiegelungen an den Geraden durch 0 und durch Kantenmittelpunkte oder Ecken. Alle diese Gruppen heißen Diedergruppen, Notation: Sie sind Gruppen vom Typ  $D_{2n}^{(2)}$ .

**Beweis:** (a) Weil  $SO(2, \mathbb{R}) \cong S^1$  ist, bleibt nur einzusehen, dass die endlichen Untergruppen der  $S^1$  alle zyklisch sind und aus Einheitswurzeln bestehen. Das wird klar, wenn man in jeder endlichen Untergruppe der  $S^1$  das Element  $e^{2\pi i \alpha}$  mit minimalem  $\alpha > 0$  betrachtet. Es muß ein zyklisches Erzeugendes der Gruppe sein.

(b) Sei  $U \subset O(2, \mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe mit  $U \not\subset SO(2, \mathbb{R})$ . Dann ist die Einschränkung des Gruppenhomomorphismus  $\det : O(2, \mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$  auf  $\det : U \rightarrow \{\pm 1\}$  surjektiv. Der Kern  $U \cap SO(2, \mathbb{R})$  ist wegen (a) eine Gruppe  $C_n^{(2)}$ . Er ist ein Normalteiler und hat neben sich selber nur die Nebenklasse  $U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))$ . Dann ist auch  $|U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))| = n$ , und es ist  $|U| = 2n$ . Die Elemente von  $U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))$  sind lauter Spiegelungen. Sei  $s_v$  eine von ihnen. Wegen

$$d_{1/n} \circ s_v = s_{d_{1/2n}(v)}$$

besteht  $U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))$  genau aus den Spiegelungen an den Geraden  $\mathbb{R} \cdot d_{k/2n}(v)$  für  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Es gibt bis auf Streckung ein (im Fall  $n$  ungerade) oder zwei (im Fall  $n$  gerade) reguläre  $n$ -Ecke  $A$  mit Mittelpunkt 0, so dass diese Geraden durch die Ecken oder Kantenmittelpunkte von  $A$  laufen. Es ist  $U = \text{Sym}(A)$ .  $\square$

### 14.3 Orthogonale und unitäre Automorphismen

**Bemerkungen 14.9** Das Ziel dieses Unterkapitels ist Satz 14.11, der die Struktur von orthogonalen Automorphismen und orthogonalen Matrizen für beliebiges  $n$  beschreibt.

Aber es ist einfacher (und eleganter), zuerst in Satz 14.10 die Struktur von unitären Automorphismen und Matrizen zu klären.

Die Sätze 14.10 und 14.11 geben die zentralen Strukturaussagen für:

1. Unitäre Automorphismen (d.h. über  $\mathbb{C}$ , abstrakte Situation),
2. Unitäre Matrizen (über  $\mathbb{C}$ , Übergang zu Matrizen),
3. Orthogonale Matrizen (über  $\mathbb{R}$ , Spezialisierung auf reelle Matrizen),
4. Orthogonale Automorphismen (über  $\mathbb{R}$ , Übergang zur abstrakten Situation).

Die Resultate werden in dieser Reihenfolge entwickelt. Die Resultate über  $\mathbb{C}$  sind wegen des Hauptsatzes der Algebra (Satz 2.19 bzw. 2.23 (a), *komplexe Polynome zerfallen in Linearfaktoren*) einfacher als die über  $\mathbb{R}$ . Ein Teil der Argumente ist sehr ähnlich zum Beweis des Spektralsatzes 13.1 für reelle symmetrische Matrizen.

**Satz 14.10** (Spektralsatz für unitäre Automorphismen und Matrizen)

(a) (Abstrakte Version) Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ , und sei  $f : V \rightarrow V$  ein unitärer Automorphismus, d.h.  $f \in U(V, \phi)$ . Dann gilt:

- (i) Alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $f$  erfüllen  $|\lambda| = 1$ .
- (ii) Es gibt keine Jordanblöcke außer denen der Größe  $1 \times 1$ , d.h.  $f$  ist diagonalisierbar, d.h.  $\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda)$  für alle Eigenwerte  $\lambda$ .
- (iii) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.

$$\text{Eig}(f, \lambda_1) \perp \text{Eig}(f, \lambda_2) \quad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Wegen (ii) und (iii) gibt es eine ON-Basis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

(b) (Matrix-Version) Sei  $A \in U(n)$  eine unitäre Matrix. Dann gelten die Aussagen (i), (ii) und (iii) von (a) genauso. Es gibt eine ON-Basis von  $M(n \times 1, \mathbb{C})$  bezüglich des Standardskalarproduktes aus Eigenvektoren von  $A$ . Ist

$$T := M(\text{Standardbasis}, \text{ON-Basis aus Eigenvektoren})$$

die Basiswechselmatrix, so ist  $T \in U(n)$  und

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** (a) (i) Sei  $v \in V - \{0\}$  ein Eigenvektor von  $f$  mit Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann ist

$$0 < \phi(v, v) = \phi(f(v), f(v)) = \phi(\lambda \cdot v, \lambda \cdot v) = \lambda \bar{\lambda} \cdot \phi(v, v) = |\lambda|^2 \cdot \phi(v, v).$$

(ii) Wegen Satz 12.15 (a) gibt es eine Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$ , so dass die Matrix  $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$  in Jordannormalform ist.

Nun Indirekter Beweis. **Annahme:**  $f$  ist nicht diagonalisierbar.

Dann gibt es wegen Bemerkung 12.14 (ii) einen Eigenwert  $\lambda$ , so dass die Matrix  $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$  einen Jordanblock der Größe  $\geq 2$  zum Eigenwert  $\lambda$  hat. Also gibt es Vektoren  $b_j$  und  $b_{j+1}$  in der Basis oben mit

$$f(b_j) = \lambda \cdot b_j \quad \text{und} \quad f(b_{j+1}) = \lambda \cdot b_{j+1} + b_j.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \phi(b_{j+1}, b_j) &= \phi(f(b_{j+1}), f(b_j)) = \phi(\lambda \cdot b_{j+1} + b_j, \lambda \cdot b_j) \\ &= |\lambda|^2 \cdot \phi(b_{j+1}, b_j) + \bar{\lambda} \cdot \phi(b_j, b_j) = \phi(b_{j+1}, b_j) + \bar{\lambda} \cdot \phi(b_j, b_j), \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \phi(b_j, b_j) = 0.$$



(ii) Die Unterräume sind  $f$ -invariant (das ist klar bei  $\text{Eig}(f, 1)$  und  $\text{Eig}(f, -1)$ ).

(iii) Die Unterräume  $B_i$  sind zweidimensional, und  $f|_{B_i} : B_i \rightarrow B_i$  ist eine Drehung mit  $f|_{B_i} \neq \pm \text{id}$ .

(Es kann  $\text{Eig}(f, 1) = \{0\}$  oder  $\text{Eig}(f, -1) = \{0\}$  oder  $m = 0$  sein.)

**Beweis:** (a) Im folgenden muß sorgfältig zwischen Eigenvektoren von  $A$  in  $M(n \times 1, \mathbb{C})$  und Eigenvektoren von  $A$  in  $M(n \times 1, \mathbb{R})$  unterschieden werden. In zwei Schritten werden Spaltenvektoren  $b_1, \dots, b_n \in M(n \times 1, \mathbb{R})$  gewählt, die zusammen eine ON-Basis bilden und eine Matrix  $T$  mit den gewünschten Eigenschaften geben.

Die orthogonale Matrix  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  ist, aufgefaßt als komplexe Matrix, unitär. Daher gilt Satz 14.10 (b) für sie. Daher ist

$$M(n \times 1, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda \text{ Eigenwert von } A} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda),$$

und die Summanden sind bezüglich des Standardskalarproduktes in  $M(n \times 1, \mathbb{C})$  orthogonal zueinander. Ist  $v \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda)$ , also  $A \cdot v = \lambda \cdot v$ , so ist wegen  $A = \bar{A}$  reell

$$A \cdot \bar{v} = \overline{A \cdot v} = \overline{\lambda \cdot v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}.$$

Daher ist die komplexe Konjugation ein Isomorphismus

$$\bar{\cdot} : \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda) \rightarrow \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \bar{\lambda}), \quad v \mapsto \bar{v}.$$

Die Eigenwerte 1 und -1 sind reell. Daher gilt

$$\begin{aligned} v \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \pm 1) &\iff \Re(v) \text{ und } \Im(v) \in \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1) \\ \text{und } \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \pm 1) &= \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1) + i \cdot \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1). \end{aligned}$$

**1. Schritt:** Es wird eine ON-Basis  $b_1, \dots, b_k$  von  $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, 1)$  gewählt, und ebenso eine ON-Basis  $b_{k+1}, \dots, b_{k+l}$  von  $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, -1)$  (evtl. ist  $k = 0$  oder  $l = 0$ ). Dann ist  $b_1, \dots, b_{k+l}$  eine ON-Basis von  $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, 1) \oplus \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, -1)$  als Euklidischer Vektorraum und von  $\text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, 1) \oplus \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, -1)$  als unitärer Vektorraum (jeweils mit der Einschränkung des Standardskalarproduktes).

Falls  $k + l = n$  ist, ist man schon fertig. Im anderen Fall werden die restlichen Spaltenvektoren  $b_{k+l+1}, \dots, b_n$  im 2. Schritt konstruiert.

**2. Schritt:** Man wählt eine ON-Basis  $v_1, \dots, v_m$  des unitären Vektorraums

$$\bigoplus_{\lambda: \Im(\lambda) > 0} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda),$$

und zwar so, dass jeder der Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  in einem der Eigenräume liegt. Das geht, weil die Eigenräume orthogonal zueinander sind. Der Eigenwert zu  $v_j$  sei  $\lambda_j$  (diese Eigenwerte müssen nicht alle verschieden sein).

Die Vektoren  $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m$  sind dann automatisch eine ON-Basis von

$$\bigoplus_{\lambda: \Im(\lambda) > 0} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \overline{\lambda}) = \bigoplus_{\lambda: \Im(\lambda) < 0} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda),$$

und es ist  $\overline{v}_j \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \overline{\lambda}_j)$ . Weil alle Eigenräume orthogonal zueinander sind, bilden die Vektoren  $b_1, \dots, b_{k+l}, v_1, \dots, v_m, \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m$  eine ON-Basis von  $M(n \times 1, \mathbb{C})$ .

Man definiert für  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned} b_{k+l+2j-1} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_j + \overline{v}_j), \\ b_{k+l+2j} &:= \frac{i}{\sqrt{2}}(v_j - \overline{v}_j). \end{aligned}$$

Es muß  $k+l+2m = n$  sein. Also hat man nun Vektoren  $b_{k+l+1}, \dots, b_n$  gewählt. Dann ist auch  $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$  eine  $\mathbb{C}$ -Vektorraumbasis von  $M(n \times 1, \mathbb{C})$ . Wegen

$$\begin{aligned} \overline{b_{k+l+2j-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{v}_j + v_j) = b_{k+l+2j-1}, \\ \overline{b_{k+l+2j}} &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(\overline{v}_j - v_j) = b_{k+l+2j}, \end{aligned}$$

sind  $b_{k+l+1}, \dots, b_n$  Spaltenvektoren mit reellen Einträgen,  $b_{k+l+1}, \dots, b_n \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ . Also ist  $\mathcal{B}$  auch eine  $\mathbb{R}$ -Vektorraumbasis von  $M(n \times 1, \mathbb{R})$ .

Weil  $v_j$  und  $\overline{v}_j$  eine ON-Basis des von ihnen erzeugten (komplexen) Vektorraums ist, ist

$$\overline{v}_j^{tr} \cdot v_j = v_j^{tr} \cdot \overline{v}_j = 1, \quad v_j^{tr} \cdot v_j = \overline{v}_j^{tr} \cdot \overline{v}_j = 0.$$

Damit rechnet man leicht aus

$$b_{k+l+r}^{tr} \cdot b_{k+l+s} = \delta_{rs} \quad \text{für } r, s \in \{2j-1, 2j\}.$$

Daher ist  $\mathcal{B}$  eine ON-Basis von  $M(n \times 1, \mathbb{R})$ .

Es ist  $\lambda_j = e^{i\alpha_j} = \cos \alpha_j + i \sin \alpha_j$  für ein  $\alpha_j \in (0, \pi)$ , denn  $\Im(\lambda_j) > 0$ . Man rechnet aus

$$\begin{aligned} (A \cdot b_{k+l+2j-1}, A \cdot b_{k+l+2j}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\lambda_j \cdot v_j + \overline{\lambda}_j \cdot \overline{v}_j, i\lambda_j \cdot v_j - i\overline{\lambda}_j \cdot \overline{v}_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\cos \alpha_j \cdot (v_j + \overline{v}_j) + \sin \alpha_j \cdot (iv_j - i\overline{v}_j), \\ &\quad \sin \alpha_j(-v_j - \overline{v}_j) + \cos \alpha_j(iv_j - i\overline{v}_j)) \\ &= (b_{k+l+2j-1}, b_{k+l+2j}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun sei  $T$  die Matrix mit den Spalten  $b_1, \dots, b_n$ , also ist  $T$  die Basiswechsellmatrix  $M(\text{Standardbasis}, \mathcal{B})$ . Daher ist  $M(\mathcal{B}, l_A, \mathcal{B}) = T^{-1}AT$  wie im Satz 14.11 (a) angegeben.

(b) Man wählt irgendeine *ON*-Basis  $\mathcal{A}$  des Euklidischen Vektorraums  $V$ . Die Matrix  $A := M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A})$  ist orthogonal nach Satz 14.3 (c). Man wendet Teil (a) an und erhält eine orthogonale Matrix  $T$  mit  $T^{-1} \cdot A \cdot T$  wie in (a). Weil  $T$  orthogonal ist, ist auch die Basis  $(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{B} := \mathcal{A} \cdot T$  eine *ON*-Basis;  $T$  ist die Basiswechsellmatrix  $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Daher ist

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

von der Gestalt wie in (a). Also ist

$$\begin{aligned} \text{Eig}(f, 1) &= \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R} \cdot b_i, \\ \text{Eig}(f, -1) &= \bigoplus_{i=k+1}^{k+l} \mathbb{R} \cdot b_i, \end{aligned}$$

und  $f$  ist auf jedem der zweidimensionalen Räume  $\mathbb{R} \cdot b_{k+l+1} \oplus \mathbb{R} \cdot b_{k+l+2}, \dots, \mathbb{R} \cdot b_{n-1} \oplus \mathbb{R} \cdot b_n$  eine Drehung.  $\square$

**Bemerkungen 14.12** (i) In Satz 14.11 (b) ist  $f|_{B_i} : B_i \rightarrow B_i$  eine Drehung  $\neq \pm \text{id}$ . Aber um den Drehwinkel  $\alpha_i$  (der dann in  $[0, 2\pi) - \{0, \pi\}$  ist) zu fixieren, braucht man eine *Orientierung* von  $B_i$ : Wenn man nur Basiswechsellmatrizen mit positiver Determinante erlaubt, zerfällt die Menge aller Basen von  $B_i$  in 2 disjunkte Teilmengen, 2 *Orientierungsklassen*. Die Wahl einer Orientierung ist die Wahl einer Orientierungsklasse.

Nun wird jede Drehung als Drehung aufgefasst, die den ersten Basisvektor einer Basis in der gewählten Orientierungsklasse in Richtung des zweiten Basisvektors dreht. Damit hat sie einen eindeutigen Drehwinkel.

Im Fall des  $\mathbb{R}^2$  im Unterkapitel 14.2 ist die gewählte Orientierungsklasse diejenige, die die Standardbasis enthält.

(ii) Im Fall  $n = 2$  gibt Satz 14.11 (b) erneut die Aussage von Satz 14.6 (d), dass ein orthogonaler Automorphismus eines 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraums eine Drehung oder eine Spiegelung ist. Aber in Satz 14.11 (a) sieht man zwar alle Drehungsmatrizen, aber nur die eine Spiegelungsmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , nicht die Spiegelungsmatrizen  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  für  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Die erhält man aus der speziellen Spiegelungsmatrix durch Konjugation mit geeigneten Matrizen  $T \in O(2, \mathbb{R})$ .

## 14.4 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien des Raumes

Aus Satz 14.11 (b) kann man ablesen, wie die orthogonalen Automorphismen eines 3-dimensionalen Euklidischen Vektorraums aussehen.

**Lemma 14.13** Sei  $V$  ein dreidimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ . Die orthogonalen Automorphismen  $f \in O(V, \phi)$  lassen sich in folgende Familien einteilen. Jede Familie ist schon durch die Gestalt der charakteristischen Polynome  $P_f(t)$  ihrer Mitglieder charakterisiert.

( $\alpha$ )  $P_f(t) = (t - 1)^3$ : nur  $\{\text{id}\}$ .

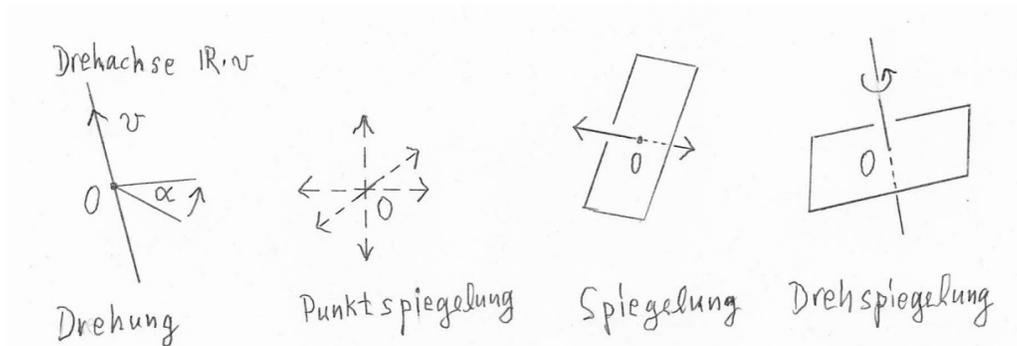
( $\beta$ )  $P_f(t) = (t - 1)^2(t + 1)$ :  $f$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(f, 1) \subset V$ .

( $\gamma$ )  $P_f(t) = (t - 1)(t + 1)^2$ :  $f$  ist eine Drehung um  $\pi$  mit Drehachse  $\text{Eig}(f, 1)$  und orthogonaler Drehebene  $\text{Eig}(f, -1)$ .

( $\delta$ )  $P_f(t) = (t + 1)^3$ : nur  $f = -\text{id}$ . Das ist die Punktspiegelung am Nullpunkt. Es läßt sich mit beliebiger Drehachse auch als Drehspiegelung mit Drehung um  $\pi$  und anschließender Spiegelung an der zur Drehachse orthogonalen Ebene deuten.

( $\varepsilon$ )  $P_f(t) = (t - 1)(t - e^{i\alpha})(t - e^{-i\alpha})$  mit  $\alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}$ :  $f$  ist eine Drehung mit Drehwinkel  $\alpha$  und Drehachse  $\text{Eig}(f, 1)$ .

( $\zeta$ )  $P_f(t) = (t + 1)(t - e^{i\alpha})(t - e^{-i\alpha})$  mit  $\alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}$ :  $f$  ist eine Drehspiegelung. Es ist eine Komposition einer Drehung mit Drehwinkel  $\alpha$  und Drehachse  $\text{Eig}(f, -1)$  und einer Spiegelung an der zur Drehachse senkrechten Ebene. Die Reihenfolge ist egal, denn Drehung und Spiegelung kommutieren.



Die Fälle ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ) und ( $\varepsilon$ ) werden unter dem Begriff **Drehungen** zusammengefaßt, wobei  $\text{id}$  **unechte Drehung** genannt wird und ( $\gamma$ ) und ( $\varepsilon$ ) **echte Drehungen** sind. Die Fälle ( $\beta$ ), ( $\delta$ ) und ( $\zeta$ ) werden unter dem Begriff **Drehspiegelungen** zusammengefaßt, wobei ( $\beta$ ) **Spiegelungen** sind und ( $\delta$ ) und ( $\zeta$ ) **echte Drehspiegelungen** sind.

Insofern hat man vier Klassen: die Identität, echte Drehungen, Spiegelungen, echte Drehspiegelungen. Sie haben 0 bzw. 3 (Drehachse und Winkel) bzw. 2 (Spiegelungsebene) bzw. 3 (Drehachse und Winkel) Parameter. Die Drehungen  $f$  erfüllen  $\det f = 1$  und sind orientierungserhaltend. Die Drehspiegelungen  $f$  erfüllen  $\det f = -1$  und sind orientierungsumkehrend.

**Beweis:** Das folgt sofort aus Satz 14.11 (b)

□

**Bemerkungen 14.14** (i) Satz 14.11 (a) liefert zu den 6 Fällen  $(\alpha)$  bis  $(\zeta)$  im Lemma 14.13 die folgenden 6 Normalformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}.$$

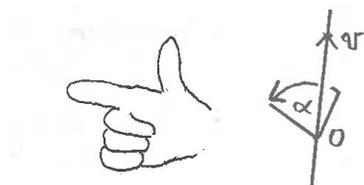
(ii) Die Punktspiegelung  $-E_3$  kommutiert mit allen Elementen von  $O(3, \mathbb{R})$ . Daher ist

$$O(3, \mathbb{R}) = SO(3, \mathbb{R}) \cup SO(3, \mathbb{R}) \cdot (-E_3) = SO(3, \mathbb{R}) \times \{\pm E_3\}.$$

Also ist  $O(3, \mathbb{R})$  als Gruppe das direkte Produkt der Gruppen  $SO(3, \mathbb{R})$  und  $\{\pm E_3\}$ . Es bleibt zu verstehen, wie die Gruppe  $SO(3, \mathbb{R})$  aussieht.

(iii) Bei einer echten Drehung wird die Wahl eines der beiden normierten erzeugenden Vektoren der Drehachse als Wahl einer *Orientierung der Drehachse* bezeichnet.

Eine orientierte Drehachse und die *rechte Hand-Regel* bestimmen einen eindeutigen Drehwinkel  $\alpha \in (0, 2\pi)$ .



Bei einer Drehung um einen Winkel  $\neq \pi$  gibt es eine eindeutige Orientierung der Drehachse, so dass mit der rechten Hand-Regel der Drehwinkel  $\alpha \in (0, \pi)$  ist. Bei den Drehungen um  $\pi$  sind beide Orientierungen gleich gut.

(iv)

$$\begin{aligned} SO(3, \mathbb{R}) &= \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal und } \det A = 1\} \\ &= \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid A^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\ &\cong \text{(als Gruppe)} \{\text{id}\} \cup \{\text{Drehung an einer orientierten Achse} \\ &\quad \mathbb{R} \cdot v \text{ mit } v \in S^2 \text{ um einen Winkel } \alpha \in (0, \pi]\}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} SO(3, \mathbb{R}) &= \{\text{Drehungen an einer Achse } \mathbb{R} \cdot v \text{ um den Winkel } \pi\} \\ &\approx \text{(als Menge)} \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| < 1\} =: D^3 \quad (3\text{-Ball im } \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Hier entspricht  $0 \in D^3$  der Identität und  $v \in D^3 - \{0\}$  der Drehung an  $\mathbb{R} \cdot v$  um den Winkel  $\pi \cdot \|v\|$ , wobei man die rechte Hand-Regel befolgt.

Die Drehungen um den Winkel  $\pi$  werden *nicht* durch  $S^2$  parametrisiert, denn entgegengesetzte Punkte auf der  $S^2$  geben dieselbe Drehung, da die Drehwinkel  $\pi$  und  $-\pi$  modulo  $2\pi$  gleich sind. Also erhält man  $SO(3)$  aus  $D^3 \cup S^2$ , indem man entgegengesetzte Punkte von  $S^2$  identifiziert, also  $D^3 \cup S^2$  so entlang seines Randes  $S^2$  mit sich selbst verklebt. Das gibt ein dreidimensionales Objekt, das nicht mehr als Teilmenge im  $\mathbb{R}^3$  veranschaulicht werden kann. Aber es sieht lokal aus wie der  $\mathbb{R}^3$ . Es ist eine *orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand* (Definition nicht hier); genauer: es ist der reelle dreidimensionale projektive Raum  $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$  (Definition nicht hier). Im Unterkapitel 16.2 wird die Geometrie dieses Raumes und des verwandten Raumes  $SU(2)$  durch zwei Experimente beleuchtet.

## 14.5 Isometrien

**Definition 14.15** (a) (Erinnerung an Lineare Algebra I im HWS 2019, Definition 9.13 (a)) Sei  $X$  irgendeine nichtleere Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt **Metrik**, falls sie erfüllt:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(M2) \quad d(y, x) = d(x, y).$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Dann heißt  $X$  *metrischer Raum* (eigentlich ist das Paar  $(X, d)$  gemeint).

(b) Sei  $X$  ein metrischer Raum mit Metrik  $d$ . Eine *Isometrie* von  $X$  ist ein bijektive Selbstabbildung  $f : X \rightarrow X$ , die die Metrik respektiert, d.h. mit

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \text{für } x, y \in X.$$

(c) Sei  $X$  ein metrischer Raum mit Metrik  $d$ . Die Menge aller Isometrien von  $(X, d)$  ist  $\text{Isom}(X, d)$ . Offenbar ist es eine Gruppe.

In diesem Kapitel geht es um Isometrien von Euklidischen Vektorräumen, vor allem Isometrien der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und des Raumes  $\mathbb{R}^3$ .

**Lemma 14.16** (Erinnerung an Lineare Algebra I im HWS 2019, Lemma 9.13 (b) und Bemerkung 9.14) Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler ( $n \in \mathbb{N}$ ) Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ . Dann ist  $V$  mit

$$d(x, y) := \|x - y\| := \sqrt{\phi(x - y, x - y)}$$

ein metrischer Raum.

**Beweis:** Das war in Korollar 9.12 und Lemma 9.13 (b) bewiesen worden. Der Knackpunkt war die Dreiecksungleichung. Sie folgte aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.  $\square$

Wegen Satz 14.3 (b) ist jeder orthogonale Automorphismus eines  $n$ -dimensionalen Euklidischen Vektorraums  $V$  eine Isometrie von  $V$  als metrischem Raum. Satz 14.17 vervollständigt diese Aussage.

**Satz 14.17** *Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Es gilt:*

$$\begin{aligned} & \{f : V \rightarrow V \text{ Isometrie mit } f(0) = 0\} \\ &= \{f : V \rightarrow V \text{ orthogonaler Automorphismus von } V\}. \end{aligned}$$

**Beweis:**  $\supset$  folgt aus Satz 14.3 (b).

$\subset$ : Das Skalarprodukt kann mit Hilfe des Abstandes zum Nullpunkt ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \phi(x, y) &= \phi(x, x) + \phi(y, y) - \phi(x - y, x - y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \\ &= d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 - d(x, y)^2. \end{aligned}$$

Sei  $f : V \rightarrow V$  eine Isometrie mit  $f(0) = 0$ . Weil  $f$  Abstände und den Nullpunkt erhält, erhält  $f$  das Skalarprodukt  $\phi$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  linear ist. Sei  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine ON-Basis von  $V$ . Dann sind auch die Vektoren  $(f(b_1), \dots, f(b_n))$  orthonormal zueinander. Sie sind linear unabhängig, denn wäre etwa  $f(b_1) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \cdot f(b_j)$ , so wäre für  $k = 2, \dots, n$

$$0 = \phi(b_1, b_k) = \phi(f(b_1), f(b_k)) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \cdot \phi(f(b_j), f(b_k)) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \cdot \phi(b_j, b_k) = \lambda_k,$$

also  $f(b_1) = 0$ , im Widerspruch zu  $\|f(b_1)\| = \|b_1\| = 1$ . Daher ist  $(f(b_1), \dots, f(b_n))$  eine ON-Basis. Also ist für ein beliebiges  $y \in V$

$$y = \sum_{j=1}^n \phi(y, f(b_j)) \cdot f(b_j).$$

Für ein beliebiges  $x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot b_j \in V$  ist

$$\phi(f(x), f(b_j)) = \phi(x, b_j) = x_j,$$

also ( $\stackrel{*}{=}$  folgt mit  $f(x) = y$  oben)

$$f\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot b_j\right) = f(x) \stackrel{*}{=} \sum_{j=1}^n \phi(f(x), f(b_j)) \cdot f(b_j) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(b_j).$$

Daraus folgt die Linearität von  $f$ . Also ist  $f$  ein orthogonaler Automorphismus.  $\square$

Der nächste Satz 14.19 wird zeigen, dass man allgemeine Isometrien Euklidischer Vektorräume (endlicher Dimension) aus *Translationen* und orthogonalen Automorphismen zusammensetzen kann.

**Definition 14.18** In (a)–(e) sei  $V$  ein Vektorraum beliebiger Dimension über einem beliebigen Körper.

(a) Eine *Translation* ist eine Selbstabbildung der Gestalt

$$T_a : V \rightarrow V, \quad v \mapsto v + a,$$

für ein  $a \in V$ . Offenbar ist  $T_a$  bijektiv, und offenbar ist der *Translationsvektor*  $a$  durch  $T_a(0) = a$  eindeutig bestimmt.

(b) (Triviales Lemma) Die Menge aller Translationen ist offenbar eine abelsche Gruppe isomorph zu  $(V, +)$ . Es ist  $T_a \circ T_b = T_{a+b}$  für  $a, b \in V$  und insbesondere  $T_a^{-1} = T_{-a}$ . Diese Gruppe wird  $\text{Transl}(V)$  genannt.

(c) Eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt *affin linear*, falls sie Komposition  $f = T_a \circ g$  einer Translation  $T_a$  ( $a \in V$ ) und eines linearen Endomorphismus  $g : V \rightarrow V$  ist. Falls  $g$  ein Automorphismus ist, heißt  $f$  *Affinität* oder *affin linearer Automorphismus*.

(d) Eine *Gerade* (oder auch *affine Gerade*) ist eine Menge der Gestalt  $a + K \cdot v$  für ein  $v \in V - \{0\}$  und ein  $a \in V$ . Eine affine Gerade ist also das Bild  $T_a(K \cdot v)$  einer Geraden  $K \cdot v$  durch 0 unter einer Translation  $T_a$ .

(e) (Triviales Lemma) Eine Translation bildet Geraden auf Geraden ab. Eine linearer Automorphismus bildet Geraden auf Geraden ab (denn  $f(a + K \cdot v) = f(a) + K \cdot f(v)$ ). Eine Affinität bildet Geraden auf Geraden ab.

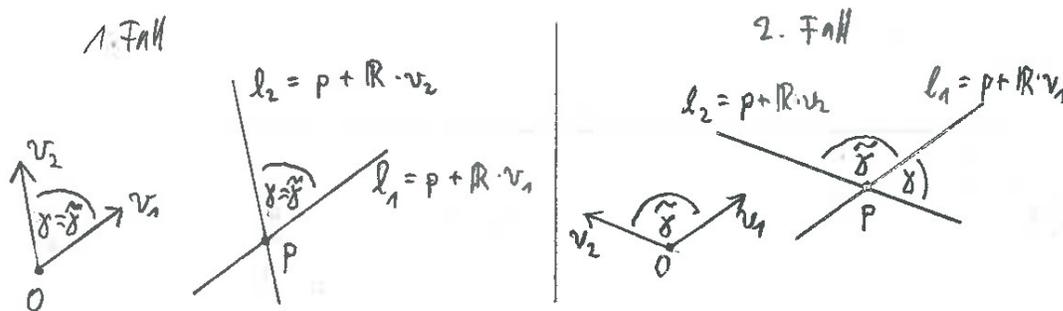
(f) Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ . Seien  $l_1$  und  $l_2$  zwei Geraden, die einen Punkt  $p \in V$  gemeinsam haben. Dann ist der Winkel zwischen  $l_1$  und  $l_2$  in  $p$  wohldefiniert. Bei  $l_1 = p + \mathbb{R} \cdot v_1$  und  $l_2 = p + \mathbb{R} \cdot v_2$  ist er der Winkel  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$  mit

$$\cos \gamma = \frac{|\phi(v_1, v_2)|}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}.$$

Wenn man die Geraden  $l_1$  und  $l_2$  mit  $v_1$  und  $v_2$  *orientiert* (Definition 14.21), ist der Winkel zwischen den orientierten Geraden der Winkel  $\tilde{\gamma} \in [0, \pi]$  zwischen  $v_1$  und  $v_2$ , also der durch

$$\cos \tilde{\gamma} = \frac{\phi(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}.$$

bestimmte Winkel. Offenbar ist  $\gamma = \tilde{\gamma}$  oder  $\gamma = \pi - \tilde{\gamma}$ , je nachdem, was kleiner ist.



**Satz 14.19** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\phi$ .

(a) Sei  $T_a : V \rightarrow V$  für ein  $a \in V$  eine Translation. Sie ist eine Isometrie von  $V$ . Sie erhält die Winkel zwischen Geraden. (Aber Skalarprodukt und Länge (=Norm) von Vektoren bleiben bei  $a \neq 0$  im allgemeinen nicht erhalten.)

(b) Sei  $f : V \rightarrow V$  eine Isometrie. Sei  $g := T_{-f(0)} \circ f$ . Dann ist  $g$  ein orthogonaler Automorphismen von  $V$ , und es gilt

$$f = T_{f(0)} \circ g = g \circ T_{-f^{-1}(0)}.$$

$f$  ist eine Affinität und bildet Geraden auf Geraden ab und erhält die Winkel zwischen Geraden.

(c) Die Abbildung

$$\text{Transl}(V) \times O(V, \phi) \rightarrow \text{Isom}(V, d), \quad (T_a, g) \mapsto T_a \circ g$$

ist bijektiv. Die Abbildung

$$\Psi : \text{Isom}(V, d) \mapsto O(V, \phi), \quad f \mapsto g := T_{-f(0)} \circ f$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern  $\text{Transl}(V)$ . Die Abbildung  $f \mapsto (T_{f(0)}, g)$  ist die Umkehrabbildung zur 1. Abbildung oben.

(d) *Bemerkung:* Die Translationen und die orthogonalen Automorphismen kommutieren im allgemeinen nicht. Daher ist  $\text{Isom}(V, \phi)$  zwar als Menge, aber nicht als Gruppe isomorph zu  $\text{Transl}(V) \times O(V, \phi)$ . Wegen der Aussagen in (c) sagt man aber, daß diese beiden Gruppen ein **semidirektes Produkt** von Gruppen bilden. Notation:  $\text{Transl}(V) \rtimes O(V, \phi)$ .

**Beweis:** (a)  $T_a$  ist eine Isometrie, denn

$$d(T_a(x), T_a(y)) = d(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Der Rest ist auch klar.

(b) Offenbar gilt  $g(0) = (T_{-f(0)} \circ f)(0) = -f(0) + f(0) = 0$ . Wegen Satz 14.17 ist  $g$  ein orthogonaler Automorphismus. Nach Definition von  $g$  ist  $f = T_{f(0)} \circ g$ . Und das ist gleich zu  $g \circ T_{-f^{-1}(0)}$ , denn

$$(T_{f(0)} \circ g)(x) = f(0) + g(x) = g(x + g^{-1}(f(0))) = g \circ T_{g^{-1}(f(0))}(x)$$

und

$$f^{-1} = g^{-1} \circ T_{-f(0)},$$

also  $f^{-1}(0) = g^{-1}(-f(0) + 0) = -g^{-1}(f(0))$ .

Weil  $f$  eine Affinität ist, bildet  $f$  Geraden auf Geraden ab.

Das Bild unter  $g$  von zwei Geraden  $p + K \cdot v_1$  und  $p + K \cdot v_2$  ist  $g(p) + K \cdot g(v_1)$  und  $g(p) + K \cdot g(v_2)$ . Wegen  $\phi(v_1, v_2) = \phi(g(v_1), g(v_2))$  ist der Winkel zwischen den Ausgangsgeraden gleich dem Winkel zwischen den Bildgeraden. Daher erhalten  $g$  und dann auch  $f$  die Winkel zwischen Geraden.

(c) Wegen (b) ist die erste Abbildung surjektiv. Wegen  $(T_a \circ g)(0) = a$  kann man aus  $T_a \circ g$  die Zahl  $a$  und die Translation  $T_a$  und dann auch  $g$  rekonstruieren. Also ist die erste Abbildung auch injektiv.

Wegen der doppelten Formel in (b) gibt es zu jedem Produkt  $g \circ T_b$  mit  $g \in O(V, \phi)$  und  $b \in V$  ein  $c \in V$  mit  $g \circ T_b = T_c \circ g$ . Bei  $f_1 = T_{f_1(0)} \circ g_1$  und  $f_2 = T_{f_2(0)} \circ g_2$  gilt  $f_1 \mapsto g_1$ ,  $f_2 \mapsto g_2$ , und

$$f_1 \circ f_2 = (T_{f_1(0)} \circ g_1) \circ (T_{f_2(0)} \circ g_2) = (T_{f_1(0)} \circ T_{f_2(0)}) \circ g_1 \circ g_2, \quad \text{also} \quad f_1 \circ f_2 \mapsto g_1 \circ g_2.$$

Daher ist die zweite Abbildung in (c) ein Gruppenhomomorphismus. Surjektiv ist sie sowieso. Daß der Kern genau aus den Translationen besteht, ist auch klar.  $\square$

Satz 14.19 gibt ein zufriedenstellendes generelles Verständnis von der Art, wie sich allgemeine Isometrien Euklidischer Vektorräume in Teile (Translationen und orthogonale Automorphismen) zerlegen lassen. Unterkapitel 14.4 hatte die orthogonalen Automorphismen genau studiert. Wir werden ihr Zusammenspiel mit den Translationen in den Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  im Unterkapitel 14.6 ansehen.

**Beispiele 14.20** (i) Ein orthogonaler Automorphismus  $f \in O(V, \phi)$  eines  $n$ -dimensionalen Euklidischen Vektorraums  $V$  ist *orientierungserhaltend*, falls  $\det f = 1$  ist, und *orientierungsumkehrend*, falls  $\det f = -1$  ist, vgl. das Ende von Kapitel 7. Eine Isometrie  $f$  ist orientierungserhaltend/umkehrend, wenn der Anteil  $g = \Psi(f) \in O(V, \phi)$  orientierungserhaltend/umkehrend ist.

(ii)  $n = 1$ ,  $K = \mathbb{R}$ :

$$SO(1, \mathbb{R}) = \{E_1\} = \{(1)\}$$

$$O(1, \mathbb{R}) = \{(1), (-1)\} \cong O(\mathbb{R}, \phi_{st}),$$

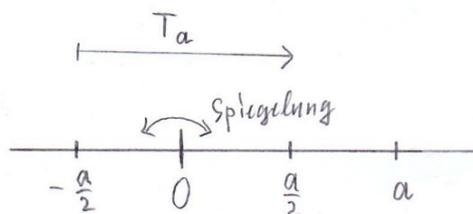
$$\text{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st}) = \text{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes O(\mathbb{R}, \phi_{st})$$

$$= \{\text{Translationen}\} \cup \{\text{Spiegelungen}\} \cong \mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{-1\},$$

$$T_a \circ (\text{Spiegelung an } 0) = (\text{Spiegelung an } \frac{a}{2})$$

$$= T_{a/2} \circ (\text{Spiegelung an } 0) \circ T_{-a/2},$$

denn  $\frac{a}{2}$  ist der einzige Fixpunkt von  $T_a \circ$  (Spiegelung an 0).



## 14.6 Symmetrien der Ebene und des Raumes

Nach Satz 14.19 (b) ist jede Isometrie eines  $n$ -dimensionalen Euklidischen Vektorraums eine Komposition aus einem orthogonalen Automorphismus und einer Translation. Im Fall von  $n = 2$  und  $n = 3$  gaben die Unterkapitel 14.2 und 14.4 ein gutes Verständnis der orthogonalen Automorphismen: Es waren im Fall  $n = 2$  Drehungen und Spiegelungen (und id als unechte Drehung) und im Fall  $n = 3$  Drehungen und Drehspiegelungen (mit Spiegelungen als speziellen Drehspiegelungen und id als unechter Drehung).

In diesem Unterkapitel werden allgemeine Isometrien in den Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  ähnlich genau studiert. Es wird sich zeigen, dass da viel mehr gesagt werden kann, als dass sie Kompositionen aus Translationen und orthogonalen Automorphismen sind.

**Definition 14.21** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ( $n \in \mathbb{N}$ ).

- (a) Zwei Basen von  $V$  heißen *orientierungsäquivalent*, falls die Basiswechselfmatrizen positive Determinante haben.
- (b) (Triviales Lemma) Es gibt nur zwei Äquivalenzklassen orientierungsäquivalenter Basen.
- (c) Dann ist eine *Orientierung* von  $V$  die Auszeichnung einer der beiden Äquivalenzklassen von orientierungsäquivalenten Basen.

**Bemerkungen 14.22** Zum Beispiel erlaubt es eine Orientierung bei einem 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum, die ON-Basen in der ausgezeichneten Äquivalenzklasse orientierungsäquivalenter Basen zu betrachten. Dann kann man eine solche ON-Basis  $(e_1, e_2)$  wählen und jeder Drehung  $f$  um 0 den Drehwinkel  $\alpha \in [0, 2\pi[$  mit  $f(e_1) = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2$  zuordnen. Dann schreibt man sie als Drehung  $d_\alpha$ .

Für abstrakte Resultate braucht man keine Orientierung, aber für Formeln mit Winkeln ist eine Orientierung nötig.

Beim  $\mathbb{R}^n$  hat man von der Standardbasis her eine natürliche Orientierung.

**Definition 14.23** Sei  $V$  ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum, und sei  $f : V \rightarrow V$  eine Isometrie von  $V$ .

(a)  $f$  ist eine *Drehung*, falls ein  $p \in V$  und eine Drehung  $d \in SO(V, \phi)$  um 0 existieren, so dass  $f = T_p \circ d \circ T_{-p}$  ist.

Notation: Wenn  $V$  orientiert und  $d = d_\alpha$  mit  $\alpha \in [0, 2\pi[$  ist, ist  $f = d_{\alpha,p}$ . Dann ist  $f$  die Drehung mit Winkel  $\alpha$  um den Punkt  $p$ .

(b)  $f$  ist eine *Spiegelung*, falls eine Gerade  $L = p + \mathbb{R} \cdot v \subset V$  existiert, so dass  $f = T_p \circ s_v \circ T_{-p}$  ist. Hier ist  $s_v \in O(V, \phi)$  die Spiegelung an der Geraden  $\mathbb{R} \cdot v \subset V$ .  
Notation:  $f = s_L$ ,  $f$  ist die Spiegelung an der Geraden  $L$ .

(c)  $f$  ist eine *Gleitspiegelung*, falls ein Vektor  $v \in V - \{0\}$  und eine Gerade  $L = p + \mathbb{R} \cdot v \subset V$  existieren, so dass  $f = T_v \circ s_L$  ist.

Notation:  $f = g_{v,L}$ ,  $f$  ist die Gleitspiegelung an der Geraden  $L$  mit Translationsvektor  $v$  (in Richtung der Geraden  $L$ ). Bemerkung:  $T_v$  und  $s_L$  kommutieren.

**Satz 14.24** Sei  $V$  ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum.

(a) Die Isometrien von  $V$ , die Fixpunkte haben, lassen sich über ihre Fixpunktmenge charakterisieren, und sie ergeben sich durch Konjugation mit Translationen aus den orthogonalen Automorphismen: Es gibt nur die Identität  $\text{id}$  (Fixpunktmenge =  $V$ ), die Drehungen (Fixpunktmenge = der Punkt, um den gedreht wird) und die Spiegelungen (Fixpunktmenge = die Gerade, an der gespiegelt wird).

(b) Zu diesen 3 Klassen kommen 2 Klassen von Isometrien hinzu, die keine Fixpunkte haben: die Translationen und die Gleitspiegelungen.

(c) Die Kompositionen von Drehungen und Spiegelungen mit Translationen sind Elemente in folgenden Klassen:

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ \text{id} &= \text{Translation}, \\ \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung}) &\in \{\text{echte Drehungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Spiegelung} &\in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Parameter für die verschiedenen Typen:

id	Translationen	Drehungen	Spiegelungen	Gleitspiegelungen
0	2	3	2	3

**Beweis:** (a) Sei  $f$  eine Isometrie mit einem Fixpunkt  $p \in V$ . Dann ist  $g := T_{-p} \circ f \circ T_p$  eine Isometrie mit Fixpunkt 0, Nach Satz 14.17 ist  $g$  ein orthogonaler Automorphismus, also ist  $g = \text{id}$  mit Fixpunktmenge  $V$  oder eine echte Drehung um 0 mit Fixpunktmenge  $\{0\}$  oder eine Spiegelung an einer Geraden  $L$  durch 0 mit Fixpunktmenge  $L$ . Die Konjugation  $T_p \circ g \circ T_{-p} = f$  hat die Fixpunktmenge

$$(\text{Fixpunktmenge von } f) = (\text{Fixpunktmenge von } g) + p$$

und ist nach Definition 14.23 gleich  $\text{id}$  oder eine Drehung oder eine Spiegelung.

(b) Die Translationen  $T_a$ ,  $a \in V - \{0\}$ , sind natürlich Isometrien ohne Fixpunkte. Auch die Gleitspiegelungen sind Isometrien ohne Fixpunkte.

Es bleibt zu zeigen, dass alle Isometrien ohne Fixpunkte sind.

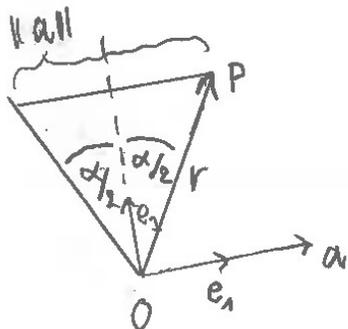
Sei nun eine Orientierung von  $V$  gewählt. Wegen Satz 14.19 (b) muß bloß gezeigt werden, dass  $\text{Translation} \circ (\text{echte Drehung um } 0)$  wieder eine echte Drehung ist, und dass  $\text{Translation} \circ (\text{Spiegelung an einer Geraden durch } 0)$  eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.

Jede orientierungserhaltende Isometrie, die nicht  $\text{id}$  oder eine Translation oder eine Drehung um  $0$  ist, hat die Gestalt  $f = T_a \circ d_\alpha$  mit  $a \in V - \{0\}$  und  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ . Sei  $e_1 := a/\|a\|$  und  $e_2 := d_{\pi/2}(e_1)$ . Dann ist  $(e_1, e_2)$  eine richtig orientierte ON-Basis von  $V$ . Die folgende Skizze zeigt, dass

$$p := \frac{\|a\|}{2}(e_1 + \cot \frac{\alpha}{2} \cdot e_2) = r \sin \frac{\alpha}{2} \cdot e_1 + r \cos \frac{\alpha}{2} \cdot e_2 \quad \text{mit} \quad r := \frac{\|a\|/2}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

ein Fixpunkt von  $f$  ist. Daher ist

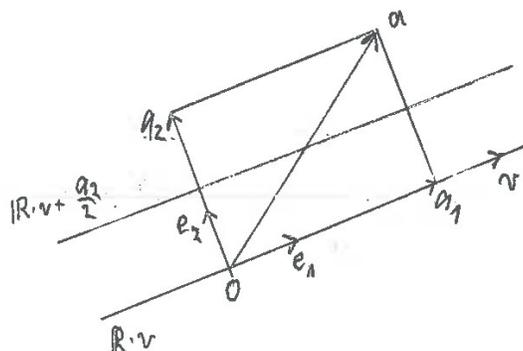
$$T_a \circ d_\alpha = d_{\alpha,p} = T_p \circ d_\alpha \circ T_{-p} = \text{eine Drehung.}$$



Jede orientierungsumkehrende Isometrie hat die Gestalt  $f = T_a \circ s_v$  mit  $a \in V$  und  $v \in V - \{0\}$ . Sei  $e_1 := v/\|v\|$  und  $e_2 := d_{\pi/2}(e_1)$ . Dann ist  $(e_1, e_2)$  eine richtig orientierte ON-Basis von  $V$ , und  $a = a_1 + a_2$  mit geeigneten  $a_1 \in \mathbb{R}e_1$  und  $a_2 \in \mathbb{R}e_2$ . Die folgende Skizze zeigt, dass die Gerade  $E := \mathbb{R} \cdot v + \frac{a_2}{2}$  die Fixpunktmenge von  $T_{a_2} \circ s_v$  ist. Daher ist  $T_{a_2} \circ s_v = s_E$ , und es gilt

$$T_a \circ s_v = T_{a_1} \circ (T_{a_2} \circ s_v) = T_{a_1} \circ s_E$$

Die rechte Seite  $T_{a_1} \circ s_E$  ist offensichtlich eine Gleitspiegelung, falls  $a_1 \neq 0$  ist, und eine Spiegelung, falls  $a_1 = 0$  ist.



(c) Dass jede Komposition in der jeweils angegebenen Menge liegt, beweist man durch eine leichte Verallgemeinerung des Beweises von (b).

Bei den Translationen ist die Anzahl der Parameter gleich  $\dim V = 2$ . Bei den echten Drehungen kann man den eindeutigen Fixpunkt in  $V$  und den Drehwinkel beliebig wählen. Das gibt  $2 + 1 = 3$  Parameter. Bei den Spiegelungen wählt man nur die Spiegelungsgerade. Das gibt 1 Parameter für ihre Richtung und 1 Parameter für den Abstand zur 0. Bei den Gleitspiegelungen hat man 1 Parameter mehr als bei den Spiegelungen, die Strecke der Translation entlang der Spiegelungsgeraden.  $\square$

**Definition 14.25** Sei  $V$  ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum, und sei  $f : V \rightarrow V$  eine Isometrie von  $V$ .

(a)  $f$  ist eine *Drehung*, falls ein  $p \in V$  und eine Drehung  $d \in SO(V, \phi)$  existieren, so dass  $f = T_p \circ d \circ T_{-p}$  ist.

Notation: Wenn  $V$  orientiert und  $d = d_{L, \alpha}$  mit orientierter Drehachse  $L$  und Drehwinkel  $\alpha \in [0, 2\pi[$  ist, so wird  $f = d_{L+p, \alpha}$  geschrieben,  $f$  ist die Drehung mit orientierter Drehachse  $L + p$  und Drehwinkel  $\alpha$ .

(b)  $f$  ist eine *Schraubung*, falls eine echte Drehung  $d \in \text{Isom}(V, \phi)$  und eine Translation  $T_a$  mit  $a \in V - \{0\}$  existieren, so dass die Drehachse die Gestalt  $p + \mathbb{R} \cdot a$  für ein  $p \in V$  hat und so dass  $f = T_a \circ d$  ist.

Bemerkung: Dann kommutieren  $T_a$  und  $d$ .

(c)  $f$  ist eine *Spiegelung*, falls eine Ebene  $E$  durch 0 und ein  $p \in V$  existieren, so dass  $f = T_p \circ s_E \circ T_{-p}$  ist. Hier ist  $s_E$  die Spiegelung an der Ebene  $E \subset V$ .

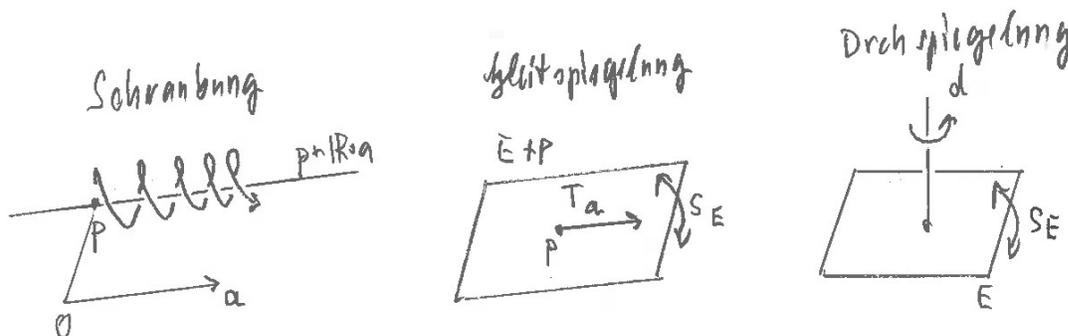
Notation:  $f = s_{E+p}$ ,  $f$  ist die Spiegelung an der *affinen* Ebene  $E + p$ .

(d)  $f$  ist eine *Gleitspiegelung*, falls ein 2-dimensionaler Untervektorraum  $E \subset V$ , ein  $p \in V$  und ein  $a \in E$  existieren, so dass  $f = T_a \circ s_{E+p}$  ist.

Bemerkung: Dann kommutieren  $T_a$  und  $s_{E+p}$ . Und  $T_a$  bildet  $E$  auf sich ab und  $E + p$  auf sich ab.

(e)  $f$  ist eine *Drehspiegelung*, falls eine echte Drehung  $d \in \text{Isom}(V, \phi)$  und eine Spiegelung  $s_E \in \text{Isom}(V, \phi)$  existieren, so dass Drehachse und Spiegelungsebene senkrecht zueinander sind und so dass  $f = d \circ s_E$  ist.

Bemerkung: Dann kommutieren  $d$  und  $s_E$ .



**Satz 14.26** Sei  $V$  ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum.

(a) Die Isometrien von  $V$ , die Fixpunkte haben, lassen sich über ihre Fixpunktmenge charakterisieren, und sie ergeben sich durch Konjugation mit Translationen aus den orthogonalen Automorphismen: Es gibt nur die Identität  $\text{id}$  (Fixpunktmenge =  $V$ ), die Drehspiegelungen (Fixpunktmenge = der Schnittpunkt von Drehachse und Spiegelungsebene), die Drehungen (Fixpunktmenge = die Gerade, um die gedreht wird) und die Spiegelungen (Fixpunktmenge = die Ebene, an der gespiegelt wird).

(b) Zu diesen 4 Klassen kommen 3 Klassen von Isometrien hinzu, die keine Fixpunkte haben: die Translationen, die Gleitspiegelungen und die Schraubungen.

(c) Die Kompositionen von Drehungen und Spiegelungen mit Translationen sind Elemente in folgenden Klassen:

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ \text{id} &= \text{Translation}, \\ \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung}) &\in \{\text{echte Drehungen}\} \cup \{\text{Schraubungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Spiegelung} &\in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleit Spiegelungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Dreh Spiegelung} &\in \{\text{Dreh Spiegelungen}\}. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Parameter für die verschiedenen Typen:

id	Translationen	Drehungen	Schraubungen	Spiegelungen	Gleit sp.	Dreh sp.
0	3	5	6	3	5	6

**Beweis:** (a) Sei  $f$  eine Isometrie mit einem Fixpunkt  $p \in V$ . Dann ist  $g := T_{-p} \circ f \circ T_p$  eine Isometrie mit Fixpunkt 0, Nach Satz 14.17 ist  $g$  ein orthogonaler Automorphismus, also ist  $g = \text{id}$  mit Fixpunktmenge  $V$  oder eine echte Drehung an einer Geraden durch 0 oder eine Spiegelung an einer Ebene durch 0 oder eine Drehspiegelung mit  $\{0\}$  als Fixpunktmenge. Die Konjugation  $T_p \circ g \circ T_{-p} = f$  hat die Fixpunktmenge

$$(\text{Fixpunktmenge von } f) = (\text{Fixpunktmenge von } g) + p$$

und ist nach Definition 14.25 gleich  $\text{id}$  oder eine Drehung oder eine Spiegelung oder eine Drehspiegelung.

(b) Die Translationen  $T_a$ ,  $a \in V - \{0\}$ , sind natürlich Isometrien ohne Fixpunkte. Auch die Gleitspiegelungen und Schraubungen sind Isometrien ohne Fixpunkte. Es bleibt zu zeigen, dass das alle Isometrien ohne Fixpunkte sind. Wegen Satz 14.19 (b) muß bloß gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung an einer Geraden durch } 0) &\in \{\text{echte Drehungen}\} \\ &\cup \{\text{Schraubungen}\}, \\ \text{Translation} \circ (\text{Spiegelung an einer Ebene durch } 0) &\in \{\text{Spiegelungen}\} \\ &\cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}, \\ \text{Translation} \circ (\text{Drehspiegelung mit Fixpunkt } 0) &\in \{\text{Drehspiegelungen}\} \end{aligned}$$

gilt.

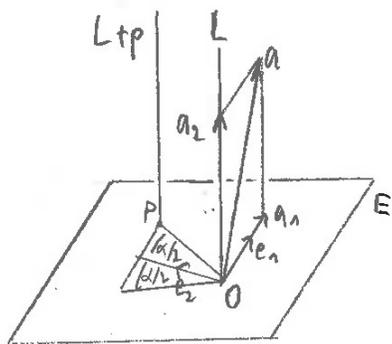
Sei nun eine Orientierung von  $V$  gewählt. Sei  $a \in V - \{0\}$ , sei  $L = \mathbb{R} \cdot v$  eine Gerade mit Orientierung gegeben durch  $v \in V - \{0\}$ , und sei  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ . Sei  $a = a_1 + a_2$  mit  $a_2 \in \mathbb{R} \cdot v$  und  $a_1 \in E := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ .

**1. Fall, Drehung oder Schraubung:** Es muß gezeigt werden, dass  $T_a \circ d_{L,\alpha}$  eine echte Drehung oder eine Schraubung ist.

Offenbar bildet  $T_{a_1} \circ d_{L,\alpha}$  alle zu  $E$  parallelen Ebenen auf sich ab. Nach dem Beweis von Satz 14.24 (b) ist  $T_{a_1} \circ d_{L,\alpha} = d_{L+p,\alpha}$  die Drehung an der Geraden  $L + p$  mit einem  $p \in E$ , das wie im Beweis von Satz 14.24 (b) bestimmt wird. Dann ist

$$T_a \circ d_{L,\alpha} = T_{a_2} \circ T_{a_1} \circ d_{L,\alpha} = T_{a_2} \circ d_{L+p,\alpha}$$

eine echte Drehung, falls  $a_2 = 0$  ist, und eine Schraubung, falls  $a_2 \neq 0$  ist. Die folgende Skizze soll das anschaulich machen.



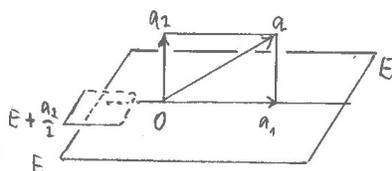
**2. Fall, Spiegelung oder Gleitspiegelung:** Hier wird  $\alpha$  nicht benutzt. Es muß gezeigt werden, dass  $T_a \circ s_E$  eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist. Es ist

$$T_a \circ s_E = s_{E + \frac{a_2}{2}}$$

die Spiegelung an der (affinen) Ebene  $E + \frac{a_2}{2}$ , denn diese Ebene ist die Fixpunktmenge von  $T_{a_2} \circ s_E$ . Daher ist

$$T_a \circ s_E = T_{a_1} \circ T_{a_2} \circ s_E = T_{a_1} \circ s_{E + \frac{a_2}{2}}$$

eine Spiegelung, falls  $a_1 = 0$  ist, und eine Gleitspiegelung, falls  $a_1 \neq 0$  ist. Die folgende Skizze soll das anschaulich machen.



**3. Fall, Drehspiegelung:** Es muß gezeigt werden, dass  $T_a \circ (d_{L,\alpha} \circ s_E)$  eine Drehspiegelung ist. Den Fall behandelt man als Kombination der beiden Fälle vorher. Es ist

$$\begin{aligned} T_a \circ (d_{L,\alpha} \circ s_E) &= (T_{a_1} \circ T_{a_2}) \circ (s_E \circ d_{L,\alpha}) = T_{a_1} \circ (T_{a_2} \circ s_E) \circ d_{L,\alpha} \\ &= T_{a_1} \circ s_{E+\frac{a_2}{2}} \circ d_{L,\alpha} = T_{a_1} \circ d_{L,\alpha} \circ s_{E+\frac{a_2}{2}} \\ &= d_{L+p,\alpha} \circ s_{E+\frac{a_2}{2}}. \end{aligned}$$

Das ist eine Drehspiegelung. Die Skizze zum 1. Fall macht auch diesen 3. Fall anschaulich.

(c) Dass jede Komposition in der jeweils angegebenen Menge liegt, beweist man durch eine leichte Verallgemeinerung des Beweises von (b).

Bei den Translationen ist die Anzahl der Parameter gleich  $\dim V = 3$ .

Bei den echten Drehungen kann man die orientierte Drehgerade und den Drehwinkel in  $]0, \pi]$  wählen. Bei der Drehgerade muß man die Richtung und einen Basispunkt wählen, wobei eine 1-Parameter-Familie von Basispunkten dieselbe Drehgerade gibt. Das gibt  $(2 + (3 - 1)) + 1 = 5$  Parameter.

Bei den Schraubungen trifft man die gleichen Wahlen wie bei den Drehungen und wählt zusätzlich die Strecke der Translation. Das gibt  $5 + 1 = 6$  Parameter.

Bei den Spiegelungen wählt man nur die Spiegelungsebene. Das gibt 2 Parameter für ihre Richtung und 1 Parameter für den Abstand zur 0, also  $2 + 1 = 3$  Parameter.

Bei den Gleitspiegelungen hat man 2 Parameter mehr als bei den Spiegelungen, den Translationsvektor innerhalb der Spiegelungsebene.

Bei den Drehspiegelungen hat man 3 Parameter mehr als bei den Spiegelungen, also 6 Parameter. Man wählt den Punkt in der Spiegelungsebene, in dem die Spiegelungsebene die Drehgerade trifft, und den Winkel der Drehung, zusammen sind das  $2 + 1 = 3$  zusätzliche Parameter.  $\square$

## 15 Geraden, Dreiecke und Kreise in der Euklidischen Ebene

### 15.1 Geraden

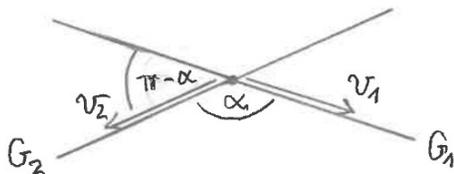
**Definition 15.1** (Auch Notationen und Erinnerungen an bekannte Begriffe)

(a) Die *Euklidische Ebene*  $\mathbb{R}^2 = M(1 \times 2, \mathbb{R})$  mit dem Standardskalarprodukt  $\phi$  mit  $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$  wird auch als  $E^2 := \mathbb{R}^2$  bezeichnet. Die *Norm* eines Vektors  $v \in E^2$  ist  $\|v\| := \sqrt{\phi(v, v)}$ . Der *Abstand* zwischen zwei Punkten  $P, Q \in E^2$  ist  $|PQ| := \|P - Q\|$ . Das definiert eine *Metrik* auf  $E^2$  (vgl. Korollar 9.12 und Definition/Lemma 9.13 in LA I im HWS 2019). Der Einheitskreis in  $E^2$  ist  $S^1 := \{x \in E^2 \mid \|x\| = 1\} = \{x \in E^2 \mid |x_0| = 1\}$ .

(b) Eine *Gerade*  $G$  in  $E^2$  ist eine Menge der Gestalt  $G = P + \mathbb{R} \cdot v$  für ein  $P \in E^2$  und ein  $v \in S^1$ . Eine *orientierte Gerade* ist ein Paar  $(G, v)$  mit  $G = P + \mathbb{R} \cdot v$  und  $v \in S^1$ . Klar: Jede Gerade hat 2 mögliche Orientierungen.

(c) 2 Geraden  $G_1$  und  $G_2$  sind *parallel*, falls  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  ist.

(d) Der *Winkel* zwischen 2 orientierten Gerade  $(G_1, v_1)$  und  $(G_2, v_2)$  ist  $\alpha \in [0, \pi]$  mit  $\cos \alpha = \phi(v_1, v_2)$ . Der Winkel zwischen 2 nicht orientierten Geraden  $G_1$  und  $G_2$  ist  $\beta = \min(\alpha, \pi - \alpha)$ , wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $(G_1, v_1)$  und  $(G_2, v_2)$  nach Wahl beliebiger Orientierungen  $v_1, v_2 \in S^1$  ist. Äquivalent:  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  mit  $|\cos \beta| = |\phi(v_1, v_2)|$ .



**Bemerkungen 15.2** Bei einer Geraden  $G = P + \mathbb{R} \cdot v$  in  $E^2$  with  $P \in E^2$  ein *Punkt* genannt, und  $v \in S^1 \subset E^2$  ein *Vektor*. Hinter dieser seltsamen Unterscheidung steht, dass man  $E^2$  als *affinen Raum* auffassen sollte, der Punkte und Geraden enthält und mit der Metrik  $|\cdot|$  versehen ist, dass man aber die Vektoren  $v$  als Elemente des *Tangentialraums* dieses affinen Raums auffassen sollte.

Beim affinen Raum  $E^2$  hat man die Lage des Nullpunkts  $0$  vergessen. Sein Tangentialraum ist der Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ . Der affine Raum und sein Tangentialraum sind was sauberes und kanonisches. Aber das Arbeiten mit ihnen macht alle Aussagen formaler und bringt nicht genug Gewinn. Wir unterscheiden den affinen Raum und seinen Tangentialraum nicht. Wir bleiben bei  $E^2$  mit seinen Punkten und Geraden. Die Differenz  $P_1 - P_2$  von 2 Punkten  $P_1, P_2 \in E^2$  ist ein Vektor  $P_1 - P_2 \in E^2$ .

**Satz 15.3** (a) *Durch zwei verschiedene Punkte  $P, Q \in E^2$  läuft genau eine Gerade, die Gerade*

$$G = P + \mathbb{R} \cdot \frac{P - Q}{|PQ|} = Q + \mathbb{R} \cdot \frac{P - Q}{|PQ|}.$$

Die *orientierte Gerade* mit Orientierung  $\frac{Q-P}{|PQ|}$  wird mit  $G(P, Q)$  bezeichnet. Also ist  $G(Q, P)$  (als nicht orientierte Gerade) die gleiche Gerade, aber mit der anderen Orientierung.

(b) Sei  $G = P + \mathbb{R} \cdot v$  eine Gerade mit  $P = (b_1, b_2) \in E^2$  und  $v = (a_1, a_2) \in S^1$ . Dann ist

$$G = \{(x_1, x_2) \in E^2 \mid (-a_2, a_1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r\}, \text{ mit } r := (-a_2, a_1) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Also ist  $G \subset E^2 = M(1 \times 2, \mathbb{R})$  die Menge der Zeilenvektoren, die transponiert zu den Spaltenvektoren im Lösungsraum  $\text{Lös}((-a_2, a_1), r)$  des inhomogenen Gleichungssystems oben sind.

(c)  $G_1 = P_1 + \mathbb{R} \cdot v_1$  und  $G_2 = P_2 + \mathbb{R} \cdot v_2$  seien zwei Geraden. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (i)  $G_1$  und  $G_2$  sind parallel oder gleich.
- (ii)  $\mathbb{R} \cdot v_1 = \mathbb{R} \cdot v_2$ .
- (iii)  $v_2 = \varepsilon \cdot v_1$  für ein  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ .
- (iv) Der Winkel zwischen  $G_1$  und  $G_2$  ist 0.

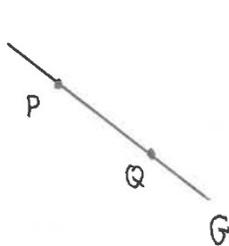
(d) Wenn zwei Geraden  $G_1$  und  $G_2$  nicht parallel oder gleich sind, schneiden sie sich in einem Punkt,  $G_1 \cap G_2 = \{P\}$  für ein  $P \in E^2$ .

(e) (Parallelenaxiom) Zu einer Geraden  $G = P + \mathbb{R} \cdot v$  und einem Punkt  $Q \notin G$  gibt es genau eine parallele Gerade durch  $Q$ , nämlich die Gerade  $Q + \mathbb{R} \cdot v$ .

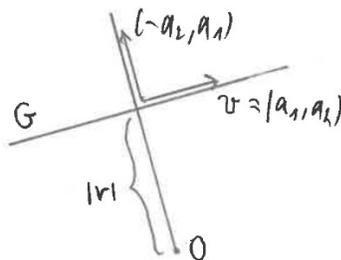
(f) (Teilungsverhältnis) Zwei Geraden  $G_1$  und  $G_2$  seien parallel oder gleich.  $P_1$  und  $Q_1$  seien 2 verschiedene Punkte auf  $G_1$ , und  $P_2$  und  $Q_2$  seien 2 verschiedene Punkte auf  $G_2$ . Dann gibt es eine eindeutige Zahl  $t \in \mathbb{R}^*$  ( $= \mathbb{R} - \{0\}$ ) mit  $P_1 - Q_1 = t \cdot (P_2 - Q_2)$ .

Sie heißt **Teilungsverhältnis** von  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$ , und sie wird mit  $\frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2} = t$  bezeichnet. Im Fall einer dritten parallelen oder gleichen Geraden  $G_3$  und 2 verschiedenen Punkten  $P_3, Q_3 \in G_3$  ist

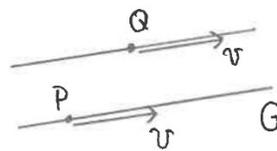
$$\frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2} \cdot \frac{P_2 Q_2}{P_3 Q_3} = \frac{P_1 Q_1}{P_3 Q_3}.$$



15.3 (a)



15.3 (b)



15.3 (e)

**Beweis:** Die meisten Aussagen des Lemmas sind anschaulich ziemlich klar. Aber sie bedürfen eines Beweises.

(a) Bei jeder Geraden  $\tilde{G} = \tilde{P} + \mathbb{R} \cdot \tilde{v}$  ist  $\tilde{v}$  bis aufs Vorzeichen eindeutig, und der Fußpunkt  $\tilde{P}$  kann innerhalb  $\tilde{G}$  beliebig gewählt werden. Bei einer Geraden  $G$  durch  $P$  und  $Q$  ist  $v = \pm \frac{P-Q}{|PQ|}$ , und als Fußpunkte bieten sich  $P$  und  $Q$  an. Die Eindeutigkeit der Geraden ist auch klar.

(b) Offensichtlich ist  $\mathbb{R} \cdot v$  bis auf Transposition (Übergang von Zeilenvektoren zu Spaltenvektoren) der Lösungsraum  $\text{Lös}((-a_2, a_1), 0)$  des homogenen Gleichungssystems, und  $G$  ist bis auf Transposition der Lösungsraum des inhomogenen Gleichungssystems  $\text{Lös}((-a_2, a_1), r)$ .

(c) und (d) (ii)  $\iff$  (iii)  $\iff$  (iv) ist klar. Sei  $v_1 = (a_{11}, a_{12})$  und  $v_2 = (a_{21}, a_{22})$ . Wegen (a) ist  $G_1 \cap G_2$  bis auf Transposition der Lösungsraum  $\text{Lös}(A, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix})$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -a_{12} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}.$$

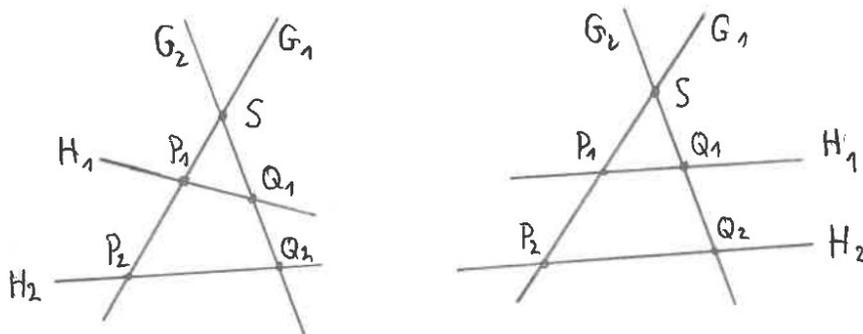
Wegen  $v_1, v_2 \in S^1$  hat  $A$  Rang 1 oder Rang 2. Die Matrix  $A$  hat genau dann Rang 1, wenn (ii)–(iv) gelten. In dem Fall ist der Lösungsraum  $\text{Lös}(A, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix})$  entweder leer ( $\Rightarrow G_1$  und  $G_2$  sind parallel), oder er ist gleich zu einer Geraden ( $\Rightarrow G_1 = G_2$ , und das ist der Lösungsraum). Im Fall von  $\text{rang } A = 2$  ist  $A$  invertierbar, und das inhomogene Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung. Dann ist  $G_1 \cap G_2 = \{P\}$ , und das ist bis auf Transposition dieser Lösungsraum.

(e) Klar.

(f) Weil  $G_1$  und  $G_2$  gleich oder parallel sind, ist wegen (b) und (c)  $\frac{P_1 - Q_1}{|P_1 Q_1|} = \varepsilon \cdot \frac{P_2 - Q_2}{|P_2 Q_2|}$  für ein  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ . Es folgt  $P_1 - Q_1 = t \cdot (P_2 - Q_2)$  mit  $t = \varepsilon \cdot \frac{|P_1 Q_1|}{|P_2 Q_2|}$ .

Die letzte Gleichung im Fall von  $G_1, G_2$  und  $G_3$ : Leichte Übung. □

**Satz 15.4** (*Orientierter Strahlensatz*)  $G_1$  und  $G_2$  seien 2 nicht gleiche und nicht parallele Geraden in  $E^2$  mit Schnittpunkt  $S$ ,  $G_1 \cap G_2 = \{S\}$  ( $S$  wird auch Scheitel genannt).  $H_1$  und  $H_2$  seien 2 Geraden, die weder zu  $G_1$  noch zu  $G_2$  gleich oder parallel sind und die  $S$  nicht enthalten. Dann hat man folgende Schnittpunkte:  $G_1 \cap H_i = \{P_i\}$ ,  $G_2 \cap H_i = \{Q_i\}$ .



Es gilt:

$$H_1 \text{ und } H_2 \text{ sind gleich oder parallel} \iff \frac{SP_1}{SP_2} = \frac{SQ_1}{SQ_2}.$$

Wenn  $H_1$  und  $H_2$  gleich oder parallel sind, gilt auch  $\frac{SP_1}{SP_2} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$ .

**Beweis:** Schreibe  $t_P := \frac{SP_1}{SP_2}$  und  $t_Q = \frac{SQ_1}{SQ_2}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} P_1 - S &= t_P \cdot (P_2 - S), & Q_1 - S &= t_Q \cdot (Q_2 - S), \\ \text{also } P_1 &= S + t_P \cdot (P_2 - S), & Q_1 &= S + t_Q \cdot (Q_2 - S), \\ \text{also } P_1 - Q_1 &= t_P \cdot (P_2 - S) - t_Q \cdot (Q_2 - S). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Im Fall  $t_P = t_Q$  folgt  $P_1 - Q_1 = t_P \cdot (P_2 - Q_2)$ , also sind dann  $H_1$  und  $H_2$  gleich oder parallel.

Im Fall, wenn  $H_1$  und  $H_2$  gleich oder parallel sind, sei  $t_R := \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$ . Dann ist

$$P_1 - Q_1 = t_R \cdot (P_2 - Q_2) = t_R \cdot (P_2 - S) - t_R \cdot (Q_2 - S). \quad (15.2)$$

Weil  $P_2 - S$  und  $Q_2 - S$  linear unabhängige Vektoren in  $E^2$  sind (denn  $G_1$  und  $G_2$  sind nicht gleich oder parallel), folgt aus (15.1) und (15.2)  $t_P = t_Q = t_R$ .  $\square$

**Bemerkung 15.5** Der nicht orientierte Strahlensatz sagt in der Situation von Satz 15.4:  $H_1$  und  $H_2$  sind gleich oder parallel  $\Rightarrow \frac{|SP_1|}{|SP_2|} = \frac{|SQ_1|}{|SQ_2|}$ . Er folgt aus dem orientierten Strahlensatz. Aber er ist schwächer. Bei ihm gilt nicht  $\Leftarrow$ . Die Gleichheit der Vorzeichen der Teilungsverhältnisse  $\frac{SP_1}{SP_2}$  und  $\frac{SQ_1}{SQ_2}$  ist beim orientierten Strahlensatz wichtig.

## 15.2 Dreiecke

**Definition 15.6** (Auch Notationen und Erinnerung an bekannte Begriffe)

(a) Die *Strecke* zwischen 2 verschiedenen Punkten  $P$  und  $Q$  in  $E^2$  ist die Menge

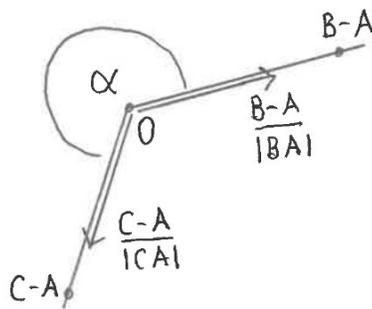
$$[P, Q] := \{P + t(Q - P) \mid t \in [0, 1]\} = \{Q + t(P - Q) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Sie ist ein kompaktes Stück der Geraden  $G(A, B)$ .

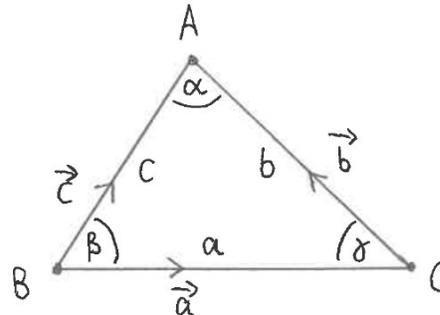
(b) Bei 3 Punkten  $A, B, C \in E^2$  mit  $B \neq A$  und  $C \neq A$  ist der Winkel  $\sphericalangle BAC \in [0, 2\pi[$  der eindeutige Winkel  $\alpha$  mit

$$d_\alpha\left(\frac{B-A}{|BA|}\right) = \frac{C-A}{|CA|}.$$

Hier ist  $d_\alpha$  die Drehung um den Winkel  $\alpha$  und mit Fixpunkt 0 (Satz 14.6 (d)).



15.6 (b)



15.6 (c)

(c) Ein *Dreieck*  $\Delta(A, B, C)$  in  $E^2$  besteht aus 3 Punkten  $A, B$  und  $C$  in  $E^2$ , die nicht auf einer Geraden liegen (sonst kann man von einem *entarteten* Dreieck sprechen) und den Strecken  $[A, B]$ ,  $[A, C]$  und  $[B, C]$ . Diese Strecken sind die *Seiten* des Dreiecks. Die Punkte  $A, B$  und  $C$  sind die *Ecken* des Dreiecks. Die Längen der Seiten werden mit

$$a := |BC|, \quad b := |AC|, \quad c := |AB|$$

bezeichnet. Es werden auch die Vektoren

$$\vec{a} := C - B, \quad \vec{b} := A - C, \quad \vec{c} := A - B$$

gewählt. Sie erfüllen

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \quad \|\vec{a}\| = a, \quad \|\vec{b}\| = b, \quad \|\vec{c}\| = c,$$

$$G(B, A) = A + \mathbb{R} \cdot \frac{\vec{c}}{c}, \quad G(C, A) = A + \mathbb{R} \cdot \frac{\vec{b}}{b}, \quad G(B, C) = A + \mathbb{R} \cdot \frac{\vec{a}}{a}.$$

Die *Innenwinkel*  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  an den Ecken  $A, B$  und  $C$  der Dreiecke sind die Winkel zwischen den folgenden orientierten Geraden:

$\alpha$ :  $G(A, B)$  und  $G(A, C)$ ,

$\beta$ :  $G(B, A)$  und  $G(B, C)$ ,

$\gamma$ :  $G(C, A)$  und  $G(C, B)$ .

(d) Konvention: Oft werden wir die Ecken eines Dreiecks so mit  $A, B$  und  $C$  benennen, dass man bei mathematisch positivem Umlauf auf den Seiten des Dreiecks die Ecken

in der Reihenfolge  $A, B, C$  trifft (und nicht in der Reihenfolge  $A, C, B$ ). Dann ist  $\alpha = \sphericalangle BAC$ ,  $\beta = \sphericalangle CBA$ ,  $\gamma = \sphericalangle ACB$ .

(e) Ein Dreieck ist *gleichschenkelig*, wenn 2 seiner Seiten gleich lang sind.

**Satz 15.7** Sei  $\Delta(A, B, C)$  ein Dreieck in  $E^2$  mit den Daten wie in Definition 15.6.

(a) Es gilt  $c < a + b$ ,  $b < a + c$ ,  $a < b + c$ .

(b) (Kosinussatz)

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

(c) (Sinussatz)

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

(d) (Innenwinkelsumme beim Dreieck)  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

(e) (Satz von Pythagoras) Der Innenwinkel  $\gamma$  ist genau dann ein rechter Winkel ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ), wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt.

(f) (Das Dreieck ist gleichschenkelig mit  $a = b$ )  $\iff \alpha = \beta$ .

**Beweis:** (a) Das folgt sofort aus der Dreiecksungleichung für die Metrik  $|\cdot|$  und daraus, dass  $A, B$  und  $C$  nicht auf einer Geraden liegen. (Die Dreiecksungleichung war eine Folgerung aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, vgl. in LA I im HWS 2019 Korollar 9.12 und Definition/Lemma 9.13).

(b)  $G(A, B)$  hat die Orientierung  $\frac{-\vec{c}}{c}$ , und  $G(A, C)$  hat die Orientierung  $\frac{\vec{b}}{b}$ . Also ist

$$\cos \alpha = \phi\left(\frac{-\vec{c}}{c}, \frac{\vec{b}}{b}\right) = \frac{\phi(\vec{b}, \vec{c})}{bc}.$$

Beachte

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{c} - \vec{b}\|^2 = \phi(\vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b}) \\ &= \phi(\vec{c}, \vec{c}) + \phi(\vec{b}, \vec{b}) - 2\phi(\vec{b}, \vec{c}) = c^2 + b^2 - 2\phi(\vec{b}, \vec{c}). \end{aligned}$$

Also

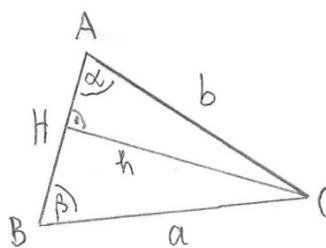
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Die beiden anderen Formeln folgen analog.

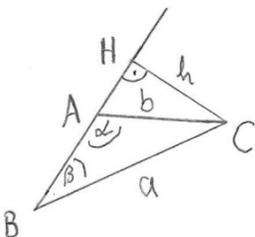
(c) Sei  $H$  der Fußpunkt des Lots von  $C$  auf die Gerade  $G(A, B)$ , d.h.  $H$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $G(A, B)$  mit der Geraden durch  $C$ , die orthogonal zu  $G(A, B)$  ist. Sei  $h := |CH|$ . Aus der naiven geometrischen Definition von  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$  folgt sofort

$$b \cdot \sin \alpha = h = a \cdot \sin \beta, \quad \text{also } \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}.$$

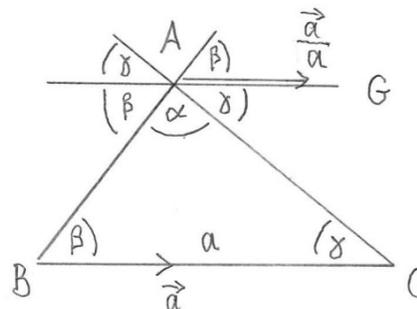
Die Gleichheit mit  $\frac{\sin \gamma}{c}$  folgt analog.



15.7 (c)



15,7 (c)



15.7 (d)

(d) Es ist

$$\alpha = \text{Winkel zwischen } G(A, B) \text{ und } G(A, C).$$

Die zu  $G(B, C)$  parallele Gerade  $(G, \frac{\vec{a}}{a})$  hat die gleiche Orientierung  $\frac{\vec{a}}{a}$  wie die Gerade  $G(B, C)$ . Daher gilt:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Winkel zwischen } G(B, C) \text{ und } G(B, A) \\ &= \text{Winkel zwischen } (G, \frac{\vec{a}}{a}) \text{ und } G(B, A) \\ &= \text{Winkel zwischen } (G, \frac{-\vec{a}}{a}) \text{ und } G(A, B), \\ \gamma &= \text{Winkel zwischen } G(C, A) \text{ und } G(C, B) \\ &= \text{Winkel zwischen } G(C, A) \text{ und } (G, \frac{-\vec{a}}{a}) \\ &= \text{Winkel zwischen } G(A, C) \text{ und } (G, \frac{\vec{a}}{a}). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\beta + \alpha + \gamma = \text{Winkel zwischen } (G, \frac{-\vec{a}}{a}) \text{ und } (G, \frac{\vec{a}}{a}) = \pi.$$

(e)  $\gamma = \frac{\pi}{2} \iff \cos \gamma = 0 \stackrel{(b)}{\iff} a^2 + b^2 = c^2.$

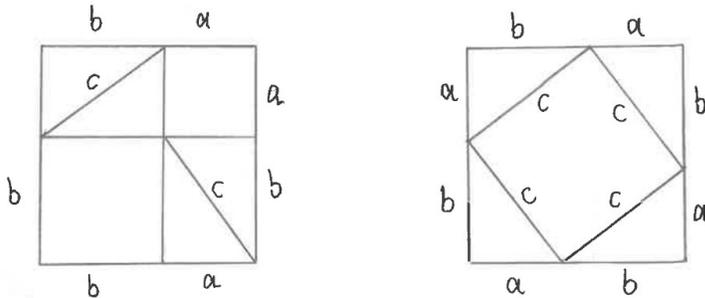
(f)

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &\iff \cos \alpha = \cos \beta \iff \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &\iff a(b^2 + c^2 - a^2) = b(a^2 + c^2 - b^2) \\ &\iff 0 = (a - b)(c^2 - (a + b)^2) \iff a = b, \end{aligned}$$

denn  $c^2 - (a + b)^2$  ist immer  $< 0$ .

□

**Bemerkung 15.8** Ein Beweis der Richtung  $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$  des Satzes von Pythagoras, den wahrscheinlich schon die Babylonier 1900-1600 v.Chr. kannten, beruht auf den 2 Berechnungen der Fläche des Quadrats mit Seitenlänge  $a + b$ , die in den folgenden 2 Bildern stecken:



**Definition 15.9** Ein *Pythagoras-Tripel* ist ein Tripel  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  natürlicher Zahlen mit  $a^2 + b^2 = c^2$ . Es heißt *primitiv*, falls  $\text{ggT}(a, b, c) = 1$  ist. Auf der Menge aller Pythagoras-Tripel werden 2 Äquivalenzrelationen  $\sim_P$  und  $\sim_{PS}$  eingeführt:

$$\begin{aligned} (a, b, c) \sim_P (d, e, f) &\iff \exists q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ mit } (a, b, c) = (qd, qe, qf). \\ (a, b, c) \sim_{PS} (d, e, f) &\iff \exists q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ mit } (a, b, c) = (qd, qe, qf) \\ &\text{oder } (a, b, c) = (qe, qd, qf). \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklassen werden *P-Äquivalenzklassen* bzw. *PS-Äquivalenzklassen* genannt.

Das folgende Lemma gibt eine Übersicht über alle *P-Äquivalenzklassen* und alle *PS-Äquivalenzklassen* und alle primitiven Pythagoras-Tripel.

**Satz 15.10** (a) *Jede P-Äquivalenzklasse von Pythagoras-Tripeln enthält genau ein primitives Pythagoras-Tripel.*

(b) *Das folgende Diagramm gibt 2 1:1-Korrespondenzen, d.h. bijektive Abbildungen:*

$$\begin{array}{ccccc} \{P\text{-Äquivalenzklassen}\} & \xleftrightarrow{1:1} & S^1 \cap \mathbb{Q}_{>0}^2 & \xleftrightarrow{1:1} & ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}_{>0}, \\ [(a, b, c)]_P & \longmapsto & \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = (x, y) & \xrightarrow{f} & \frac{y}{1+x} \\ [(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)]_P & \longleftarrow & \left(\frac{v^2 - u^2}{u^2 + v^2}, \frac{2uv}{u^2 + v^2}\right) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) & \xleftarrow{g} & \frac{u}{v} = t \end{array}$$

(c) *Für  $(u, v) \in \mathbb{N}^2$  mit  $\text{ggT}(u, v) = 1$  und  $u < v$  ist*

$$\text{ggT}(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2) = \text{ggT}(v^2 - u^2, 2uv) = \begin{cases} 2 & \text{falls } u \text{ und } v \text{ ungerade sind,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d) *Je zwei P-Äquivalenzklassen bilden eine PS-Äquivalenzklassen, nämlich  $[(a, b, c)]_P \dot{\cup} [(b, a, c)]_P = [(a, b, c)]_{PS} = [(b, a, c)]_{PS}$ .*

(e) Es ist

$$f(\{(x, y) \in S^1 \cap \mathbb{Q}_{>0}^2 \mid x < y\}) = ]\frac{1}{\sqrt{2}+1}, 1[ \cap \mathbb{Q}_{>0},$$

$$f(\{(x, y) \in S^1 \cap \mathbb{Q}_{>0}^2 \mid x > y\}) = ]0, \frac{1}{\sqrt{2}+1}[ \cap \mathbb{Q}_{>0}.$$

**Beweis:** (a) Klar.

(b) Die linke 1:1-Korrespondenz ist klar. Für die rechte 1:1-Korrespondenz braucht man  $f \circ g = \text{id}$  und  $g \circ f = \text{id}$ , woraus auch die Bijektivität von  $f$  und  $g$  folgt (LA I im HWS 2019, Aufgabe 2 von Blatt 1). Beweis von  $f \circ g = \text{id}$  und  $g \circ f = \text{id}$ : Übung.

(c) Sei  $p \geq 3$  eine Primzahl mit  $p \mid uv$ . Wegen  $\text{ggT}(u, v) = 1$  gilt  $p \mid u$  &  $p \nmid v$  oder  $p \nmid u$  &  $p \mid v$ . Es folgt  $p \nmid v^2 - u^2$ . Daraus folgt  $\text{ggT}(v^2 - u^2, 2uv) \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ . Wegen  $\text{ggT}(u, v) = 1$  sind entweder  $u$  und  $v$  beide ungerade oder eine ist gerade und die andere ungerade. Nun folgt (c) leicht.

(d) Es gibt kein Pythagoras-Tripel  $(a, b, c)$  mit  $a = b$ , denn 2 ist kein Quadrat einer natürlichen (oder rationalen) Zahl. Jedes Pythagoras-Tripel erfüllt entweder  $a < b$  oder  $a > b$ . Der Rest von (d) ist klar.

(e) Es ist

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1/\sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Daraus und aus (b) folgt (e). □

**Beispiele 15.11** (i) Wegen (b), (d) und (e) hat man Bijektionen zwischen der Menge der  $P$ -Äquivalenzklassen  $[(a, b, c)]_P$  mit  $a < b$ , der Menge aller  $PS$ -Äquivalenzklassen und der Menge  $] \frac{1}{\sqrt{2}+1}, 1[ \cap \mathbb{Q}_{>0}$ .

(ii) Hier sind Beispiele von Paaren  $(u, v)$  und zugeordneten Pythagoras-Tripeln.

$(u, v)$	$(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$	$(u, v)$	$(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$
(1, 2)	(3, 4, 5)	(2, 3)	(5, 12, 13)
(1, 3)	(8, 6, 10) $\sim_P$ (4, 3, 5)	(2, 5)	(21, 20, 29)
(1, 4)	(15, 8, 17)	(2, 7)	(45, 28, 53)
(1, 5)	(24, 10, 26) $\sim_P$ (12, 5, 13)	(3, 4)	(7, 24, 25)
(1, 6)	(35, 12, 37)	(3, 5)	(16, 30, 34) $\sim_P$ (8, 15, 17)
(1, 7)	(48, 14, 50) $\sim_P$ (24, 7, 25)	(3, 7)	(40, 42, 58) $\sim_P$ (20, 21, 29)

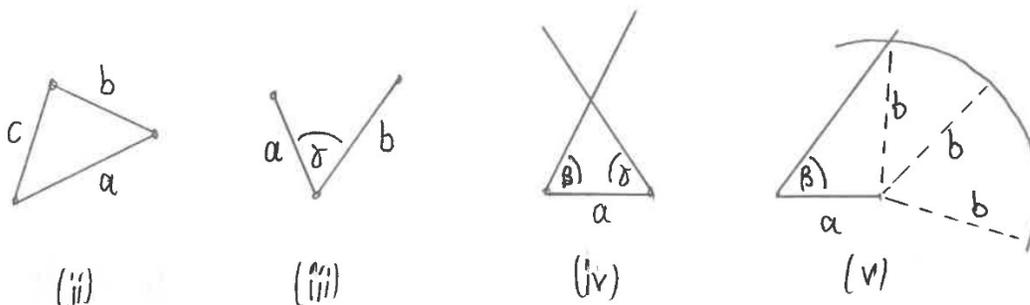
(iii) Für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  gibt es keine Lösung  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  der Gleichung  $a^n + b^n = c^n$ . Das war jahrhundertlang eine berühmte Vermutung von Pierre de Fermat. Es wurde 1993 von Andrew Wiles bewiesen, mit einer Lücke, die 1994 von Wiles und Richard Taylor geschlossen wurde.

**Definition 15.12** (a) 2 Dreiecke  $\Delta(A, B, C)$  und  $\Delta(D, E, F)$  heißen *kongruent*, falls es eine Isometrie  $f \in \text{Isom}(E^2, \phi)$  mit  $f(\{A, B, C\}) = \{D, E, F\}$  gibt, bzw. äquivalent:  $f(\Delta(A, B, C)) = \Delta(D, E, F)$ .

(b) 2 Dreiecke  $\Delta(A, B, C)$  und  $\Delta(D, E, F)$  heißen *ähnlich*, falls es eine Streckung  $\lambda \cdot \text{id} \in \text{Aut}_{VR}(E^2)$  und eine Isometrie  $f \in \text{Isom}(E^2, \phi)$  mit  $(f \circ \lambda \cdot \text{id})(\{A, B, C\}) = \{D, E, F\}$  gibt.

**Satz 15.13** (Kongruenzsatz für Dreiecke) Es seien 2 Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  in  $E^2$  gegeben. Die folgenden 5 Bedingungen sind äquivalent:

- (i) Die beiden Dreiecke sind kongruent.
- (ii) (SSS-Satz) Die Längen ihrer 3 Seiten stimmen paarweise überein.
- (iii) (SWS-Satz) Die Längen zweier Seiten und des davon eingeschlossenen Winkels stimmen überein.
- (iv) (WSW-Satz) Die Länge einer Seite und die beiden anliegenden Winkel stimmen überein.
- (v) (Das am wenigsten vertraute, aber auch wichtige Kriterium) Die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein.



**Beweis:** Bei jeder der 5 Bedingungen nehmen wir an, dass die Namen der Ecken, Seitenlängen und Winkel  $A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  des Dreiecks  $\Delta_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  geschickt gewählt sind. Konkret bedeutet das folgendes:

Bei (i): Man hat eine Isometrie  $f \in \text{Isom}(E^2, \phi)$  mit  $f(A_1) = A_2, f(B_1) = B_2, f(C_1) = C_2$ .

Bei (ii):  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ .

Bei (iii):  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, \gamma_1 = \gamma_2$ .

Bei (iv):  $a_1 = a_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$ .

Bei (v):  $a_1 = a_2 < b_1 = b_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ .

(i) $\Rightarrow$ (ii):  $f$  Isometrie  $\Rightarrow a_1 = |B_1C_1| = |B_2C_2| = a_2$  und analog  $b_1 = b_2$ ,  $c_1 = c_2$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii)&(iv)&(v): Kosinussatz  $\cos \gamma_i = \frac{a_i^2 + b_i^2 - c_i^2}{2a_i b_i} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$  und analog  $\beta_1 = \beta_2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Kosinussatz  $\cos \gamma_i = \frac{a_i^2 + b_i^2 - c_i^2}{2a_i b_i} \Rightarrow c_1 = c_2$ .

(iv) $\Rightarrow$ (i): Es gibt 2 Isometrien  $f$  und  $\tilde{f} \in \text{Isom}(E^2, \phi)$  mit  $f(B_1) = B_2 = \tilde{f}(B_1)$  und  $f(C_1) = C_2 = \tilde{f}(C_2)$ . Es ist  $\tilde{f} = s_{G(B_2, C_2)} \circ f$ , wobei  $s_{G(B_2, C_2)}$  die Spiegelung an der Geraden  $G(B_2, C_2)$  ist. Eine der beiden Isometrien bildet die orientierten Geraden  $G(B_1, A_1)$  und  $G(C_1, A_1)$  auf die orientierten Geraden  $G(B_2, A_2)$  und  $G(C_2, A_2)$  ab, und daher auch den Schnittpunkt  $A_1$  auf den Schnittpunkt  $A_2$ . Diese Isometrie bildet  $\Delta_1$  auf  $\Delta_2$  ab.

(v) $\Rightarrow$ (ii): In der Formel des Kosinussatzes  $\cos \beta_1 = \frac{a_1^2 + c_1^2 - b_1^2}{2a_1 c_1}$  ist hier  $c_1$  die Unbekannte. Man erhält die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} c_1^2 - 2a_1 \cos \beta_1 \cdot c_1 + (a_1^2 - b_1^2) &= 0 \quad \text{mit den Lösungen} \\ c_1 &= a_1 \cos \beta_1 \pm \sqrt{a_1^2 \cos^2 \beta_1 - (a_1^2 - b_1^2)} \left\{ \begin{array}{l} > 0 \quad \text{bei } + \\ < 0 \quad \text{bei } - \end{array} \right\} \quad (\text{denn } b_1 > a_1) \\ &= a_1 \cos \beta_1 + \sqrt{a_1^2 \cos^2 \beta_1 - (a_1^2 - b_1^2)}. \end{aligned}$$

Also ist  $c_1 = c_2$ . □

**Satz 15.14** (*Ähnlichkeitssatz für Dreiecke*) (a) 2 Dreiecke  $\Delta(A_1, B_1, C_1)$  und  $\Delta(A_2, B_2, C_2)$  seien ähnlich, und zwar sei  $\tilde{f} = f \circ \lambda \cdot \text{id}$  mit  $f \in \text{Isom}(E^2, \phi)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Abbildung mit  $\tilde{f}(A_1) = A_2$ ,  $\tilde{f}(B_1) = B_2$ ,  $\tilde{f}(C_1) = C_2$ . Dann ist

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \lambda.$$

(b) Es seien 2 Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  in  $E^2$  gegeben. Die folgenden 5 Bedingungen sind äquivalent:

- (i) Die beiden Dreiecke sind ähnlich.
- (ii) Die Verhältnisse der Längen ihrer 3 Seiten stimmen überein.
- (iii) Die Verhältnisse der Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel stimmen überein.
- (iv) 2 Winkel stimmen überein.
- (v) Die Verhältnisse der Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein.

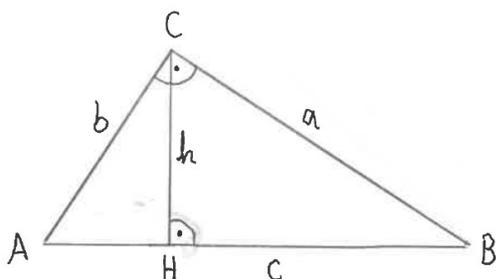
**Beweis:** (a)  $\lambda \cdot \text{id}$  reskaliert die Seitenlängen mit  $\lambda$ ,  $f$  ändert sie nicht.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii)&(iii)&(iv)&(v): Sei  $\tilde{f} = f \circ \lambda \cdot \text{id}$  mit  $f \in \text{Isom}(E^2, \phi)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Abbildung mit  $\tilde{f}(\Delta_1) = \Delta_2$ . Die Dreiecke  $(\lambda \cdot \text{id})(\Delta_1)$  und  $\Delta_2$  sind kongruent. Sie erfüllen die Bedingungen (ii)–(v) von Satz 15.13. Daher erfüllen die Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  die Bedingungen (ii)–(v) von Satz 15.14.

(ii) oder (iii) oder (iv) oder (v) $\Rightarrow$ (i): Es gibt jeweils ein  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $(\lambda \cdot \text{id})(\Delta_1)$  und  $\Delta_2$  die Bedingung (ii) bzw. (iii) bzw. (iv) bzw. (v) von Satz 15.13 erfüllen. Daher sind  $(\lambda \cdot \text{id})(\Delta_1)$  und  $\Delta_2$  kongruent. Daher sind  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  ähnlich.  $\square$

Der folgende Satz ist eine leichte Anwendung von Satz 15.14. In ihm hat man 3 ähnliche Dreiecke.

**Satz 15.15** Sei  $\Delta(A, B, C)$  ein Dreieck in  $E^2$  mit rechtem Winkel  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . Sei  $H \in G(A, B)$  der Fußpunkt des Lots von  $C$  auf die Gerade  $G(A, B)$ , d.h.  $H$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $G(A, B)$  mit der Geraden durch  $C$ , die orthogonal zu  $G(A, B)$  ist. Und es sei  $h := |CH|$ .



$$(a) \text{ (Kathetensatz)} \quad a^2 = |BH| \cdot c, \quad b^2 = |AH| \cdot c.$$

$$(b) \text{ (Höhensatz)} \quad h^2 = |AH| \cdot |BH|.$$

**Beweis:** (a) und (b) Die 3 Dreiecke  $\Delta(A, B, C)$ ,  $\Delta(A, C, H)$  und  $\Delta(C, B, H)$  sind ähnlich, denn sie haben die gleichen Winkel: Alle haben einen rechten Winkel. Die Dreiecke  $\Delta(A, B, C)$  und  $\Delta(A, C, H)$  haben den gleichen Innenwinkel  $\alpha$  an der Ecke A, die Dreiecke  $\Delta(A, B, C)$  und  $\Delta(C, B, H)$  haben den gleichen Innenwinkel  $\beta$  an der Ecke B. Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &= \frac{b}{|AH|}, & \text{also } c \cdot |AH| &= b^2, \\ \frac{c}{a} &= \frac{a}{|BH|}, & \text{also } c \cdot |BH| &= a^2, \\ \frac{|AH|}{h} &= \frac{h}{|BH|}, & \text{also } |AH| \cdot |BH| &= h^2. \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkungen 15.16** Das Unterkapitel 15.2 wird mit dem Satz von Menelaos und 5 weiteren Sätzen abgeschlossen. In den 5 weiteren Sätzen startet man mit einem Dreieck und konstruiert jeweils 3 Geraden, die sich – das ist die Aussage des Satzes – dann in einem Punkt schneiden. Beim Satz von Ceva sind die 3 Geraden nur durch ein Produkt von Teilungsverhältnissen verbunden. Bei den 4 weiteren Sätzen sind es die *Seitenhalbierenden*, die *Höhen*, die *Winkelhalbierenden* und die *Mittelsenkrechten*. Das folgende Diagramm zeigt einen Teil der logischen Beziehungen.

Orientierter Strahlensatz  $\rightarrow$  Satz von Menelaos  $\rightarrow$  Satz von Ceva,  
 Satz von Ceva  $\rightarrow$  Satz vom Seitenhalbierendenschnittpunkt,  
 Satz von Ceva & Ähnlichkeitssatz  $\rightarrow$  Satz vom Höhenschnittpunkt,  
 Kongruenzsatz  $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Satz vom Winkelhalbierendenschnittpunkt,} \\ \text{Satz vom Mittelsenkrechtenschnittpunkt.} \end{array} \right.$

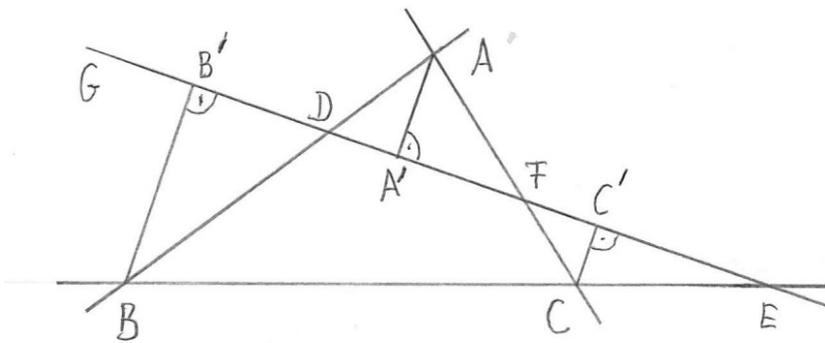
Eine *Ecktransversale* ist eine Gerade durch eine Ecke eines Dreiecks. 4 der 6 Sätze, alle außer dem Satz von Menelaos und dem Satz vom Mittelsenkrechtenschnittpunkt, betreffen je 3 Ecktransversalen.

**Satz 15.17** (Satz von Menelaos) Sei  $\Delta(A, B, C)$  ein Dreieck in  $E^2$ .

(a) Sei  $G$  eine Gerade mit  $G \cap \{A, B, C\} = \emptyset$  und  $G \cap G(A, B) = \{D\}$ ,  $G \cap G(B, C) = \{E\}$ ,  $G \cap G(C, A) = \{F\}$ . Dann gilt folgende Relation zwischen 3 Teilungsverhältnissen:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1. \quad (15.3)$$

(b) Seien  $D, E, F$  3 Punkte mit  $D \in G(A, B) - \{A, B\}$ ,  $E \in G(B, C) - \{B, C\}$ ,  $F \in G(C, A) - \{C, A\}$  und (15.3). Dann liegen  $D, E$  und  $F$  auf einer Geraden.



**Beweis:** (a)  $A', B'$  und  $C'$  seien die Fußpunkte der Lote von  $A, B$  und  $C$  auf die Gerade  $G$ . Die 3 Lote sind parallel. 3 Anwendungen des orientierten Strahlensatzes geben

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AA'}{BB'}, \quad \frac{BE}{CE} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{CF}{AF} = \frac{CC'}{AA'}.$$

Daraus folgt

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} = 1.$$

Daraus folgt (15.3).

(b) Annahme:  $G(B, C)$  und  $G(D, F)$  sind parallel. Wegen des orientierten Strahlensatzes ist dann  $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ . Mit (15.3) folgt  $\frac{BE}{EC} = 1$ , also  $B = C$ , ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

Sei  $E'$  der Schnittpunkt von  $G(B, C)$  und  $G(D, F)$ . Mit (a) folgt

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE'}{E'C} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

Mit (15.3) folgt  $\frac{BE'}{E'C} = \frac{BE}{EC}$ , also  $E = E'$ . Also liegt  $E$  auf der Geraden  $G(D, F)$ .  $\square$

**Bemerkungen 15.18** (i) Das Vorzeichen *minus* in (15.3) sagt, dass entweder genau einer der 3 Punkte  $D, E$  und  $F$  auf der jeweiligen Geraden durch 2 Ecken des Dreiecks *außerhalb* der Seite zwischen den beiden Ecken liegt, oder dass alle 3 Punkte  $D, E$  und  $F$  das tun.

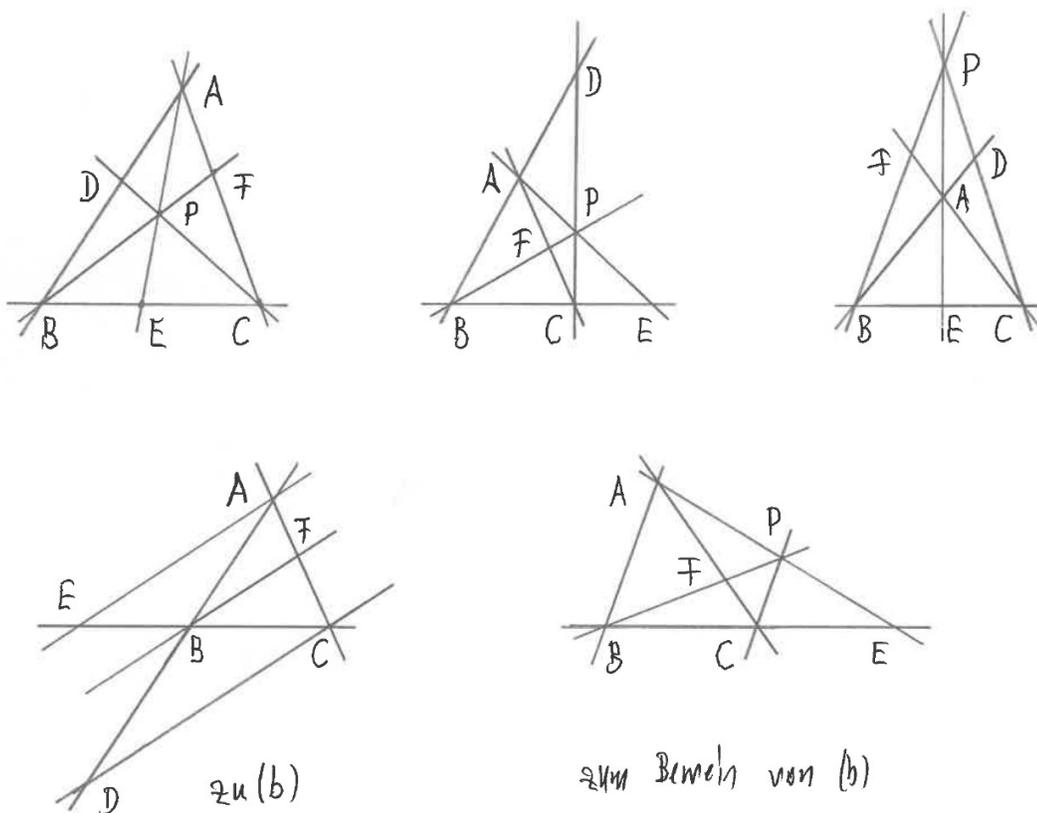
(ii) Das Vorzeichen *plus* in (15.4) im Satz von Ceva sagt, dass entweder genau eine der 3 Geraden  $G(A, P), G(B, P), G(C, P)$  das Innere des Dreiecks schneidet (äquivalent: Der Schnittpunkt  $E$  bzw.  $F$  bzw.  $D$  mit der Geraden durch die anderen beiden Ecken liegt auf der Seite zwischen diesen Ecken), oder dass alle 3 Punkte  $D, E$  und  $F$  das tun.

**Satz 15.19** (*Satz von Ceva*) Sei  $\Delta(A, B, C)$  ein Dreieck in  $E^2$ .

(a) Sei  $P \in E^2 - (G(A, B) \cup G(B, C) \cup G(C, A))$  ein Punkt mit  $G(A, B) \cap G(C, P) = \{D\}$ ,  $G(B, C) \cap G(A, P) = \{E\}$  und  $G(C, A) \cap G(B, P) = \{F\}$ . Dann ist  $\{D, E, F\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$ , und es gilt

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1. \quad (15.4)$$

(b) Seien  $D \in G(A, B) - \{A, B\}$ ,  $E \in G(B, C) - \{B, C\}$  und  $F \in G(C, A) - \{C, A\}$  3 Punkte mit (15.4). Dann sind die Ecktransversalen  $G(A, E)$ ,  $G(D, F)$  und  $G(C, D)$  entweder parallel, oder sie schneiden sich in einem Punkt  $P$ .



**Beweis:** (a) Wegen  $C \notin G(A, B)$  ist  $D \neq C$ . Wegen  $D \notin G(B, C) \cup G(C, A)$  ist  $D \notin \{B, A\}$ . Also ist  $D \notin \{A, B, C\}$ . Analog folgt  $E, F \notin \{A, B, C\}$ .

Der Satz von Menelaos für das Dreieck  $\Delta(A, B, E)$  und die Gerade  $G(C, D)$  gibt

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EP}{PA} = -1.$$

Der Satz von Menelaos für das Dreieck  $\Delta(A, E, C)$  und die Gerade  $G(B, F)$  gibt

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

Das Produkt der beiden linken Seiten und das Produkt der beiden rechten Seiten geben (15.4).

(b) 1. Fall,  $G(A, E)$  und  $G(B, F)$  sind parallel: Der orientierte Strahlensatz gibt  $\frac{EB}{EC} = \frac{AF}{AC}$ . Zusammen mit (15.4) gibt das  $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{CF}{AC} = 1$ , also  $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CF}$ . Wegen des orientierter Strahlensatzes sind  $G(B, F)$  und  $G(C, D)$  parallel.

2. Fall,  $G(A, E)$  und  $G(B, F)$  sind nicht parallel: Sei  $P$  der Schnittpunkt.

Annahme:  $G(A, B)$  und  $G(C, P)$  sind parallel. Dann gibt der orientierte Strahlensatz  $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{PC}$  und  $\frac{CF}{FA} = \frac{PC}{AB}$ . Mit (15.4) erhält man  $\frac{AD}{DB} = -1$ , was bei  $D \in G(A, B)$  –

$\{A, B\}$  unmöglich ist. Die Annahme ist falsch. Sei  $D'$  der Schnittpunkt von  $G(A, B)$  und  $G(C, P)$ . Teil (a) gibt

$$\frac{AD'}{D'B} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$

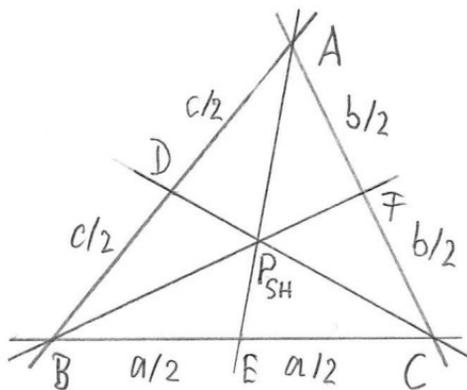
Mit (15.4) erhält man  $\frac{AD}{DB} = \frac{AD'}{D'B}$ , also  $D = D'$ .  $\square$

**Satz 15.20** (Satz vom Seitenhalbierendenschnittpunkt)

(a) Die 3 Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt  $P_{SH}$ .

(b) Dieser Punkt teilt jede Seitenhalbierende von der Ecke aus gesehen im Verhältnis  $2 : 1$ .

Bemerkung:  $P_{SH}$  ist der Schwerpunkt des Dreiecks.



**Beweis:** (a) Mit den Bezeichnungen von Satz 15.19 (b) sind hier  $D, E$  und  $F$  so gewählt, dass

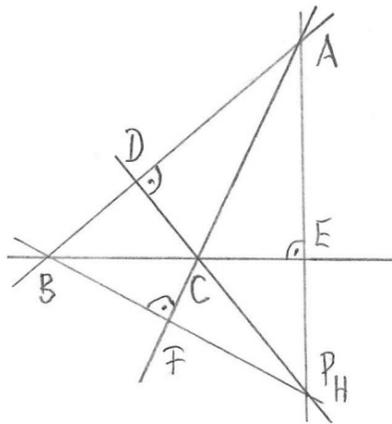
$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = 1$$

ist. Daraus folgt (15.4). Mit Teil (b) des Satzes von Ceva folgt die Behauptung.

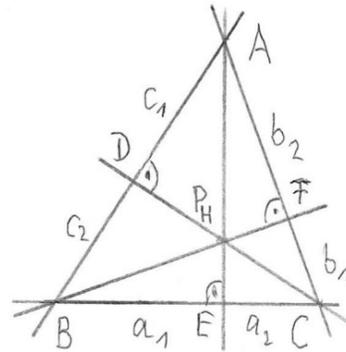
(b) Wegen  $\frac{BA}{BD} = 2 = \frac{BC}{BE}$  und dem orientierten Strahlensatz sind  $G(D, E)$  und  $G(A, C)$  parallel, und es folgt  $\frac{AC}{DE} = 2$ . Mit dem orientierten Strahlensatz folgt

$$\frac{AP_{SH}}{P_{SH}E} = \frac{AC}{DE} = 2. \quad \square$$

**Satz 15.21** (Satz vom Höhenschnittpunkt) Die 3 Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt  $P_H$ .



2. Fall



3. Fall

**Beweis:** Die Ecken des Dreiecks seien  $A, B, C$ . Die Gerade durch eine Ecke, die orthogonal zur Geraden durch die anderen beiden Ecken ist, ist eine Höhe.

1. Fall, ein Innenwinkel, z.B.  $\alpha$ , ist  $= \frac{\pi}{2}$ : Dann schneiden sich die 3 Höhen in  $A$ .
2. Fall, ein Innenwinkel ist  $> \frac{\pi}{2}$ . Übung.
3. Fall, alle Innenwinkel sind  $< \frac{\pi}{2}$ : Der Fußpunkt der Höhe durch eine Ecke liegt im Innern der Seite zwischen den anderen beiden Ecken. Die Fußpunkte werden wie im Bild mit  $D, E$  und  $F$  bezeichnet, und

$$c_1 := |AD|, \quad c_2 := |DB|, \quad a_1 := |BE|, \quad a_2 := |EC|, \quad b_1 := |CF|, \quad b_2 := |FA|.$$

Die Dreiecke  $\triangle(B, C, F)$  und  $\triangle(A, C, E)$  haben den gleichen Innenwinkel  $\alpha$  in  $A$  und je einen rechten Winkel. Wegen des Ähnlichkeitssatzes sind sie ähnlich, und es gilt

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1} = \frac{b_1 + b_2}{a_2}. \quad \text{Analog folgt } \frac{b_1 + b_2}{c_1} = \frac{c_1 + c_2}{b_2}, \quad \frac{c_1 + c_2}{a_1} = \frac{a_1 + a_2}{c_2}.$$

Es folgt

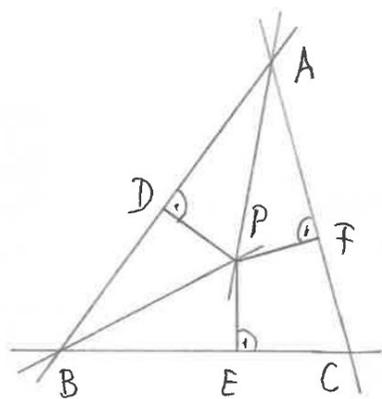
$$\frac{a_1 + a_2}{b_1} \frac{b_1 + b_2}{c_1} \frac{c_1 + c_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{a_2} \frac{c_1 + c_2}{b_2} \frac{a_1 + a_2}{c_2}, \quad \text{also } \frac{c_1}{c_2} \frac{a_1}{a_2} \frac{b_1}{b_2} = 1.$$

Mit Teil (b) des Satzes von Ceva folgt die Behauptung. □

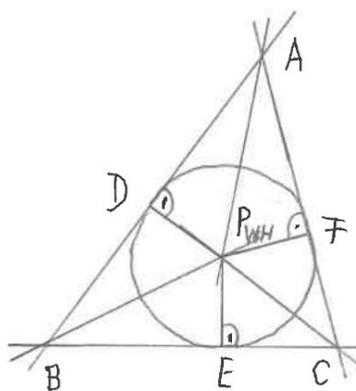
**Satz 15.22** (Satz vom Winkelhalbierendenschnittpunkt)

(a) Die 3 Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt  $P_{WH}$ .

(b) Es gibt einen Kreis mit Mittelpunkt  $P_{WH}$ , der jede Seite des Dreiecks im Fußpunkt des Lots von  $P_{WH}$  auf dieser Seite berührt und ansonsten im Innern des Dreiecks liegt. Es ist der Inkreis, und  $P_{WH}$  ist der Inkreismittelpunkt.



zum Beweis von 15.22 (a)



15.22 (b)

**Beweis:** (a) Sei  $P$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch  $B$  und durch  $A$ . Seien  $D, E$  und  $F$  die Fußpunkte der Lote von  $P$  auf die Geraden  $G(A, B)$ ,  $G(B, C)$  und  $G(C, A)$ .

Die Dreiecke  $\Delta(B, E, P)$  und  $\Delta(B, D, P)$  haben in  $B$  den gleichen Innenwinkel  $\beta/2$  und in  $D$  bzw.  $E$  einen rechten Winkel, also gleiche Winkel, und sie haben die Seite  $[BP]$  gemeinsam. Wegen des Kongruenzsatzes Satz 15.13 sind sie kongruent, und es folgt  $|EP| = |DP|$ . Analog folgt  $|EP| = |FP|$ . Man erhält  $|DP| = |FP|$ .

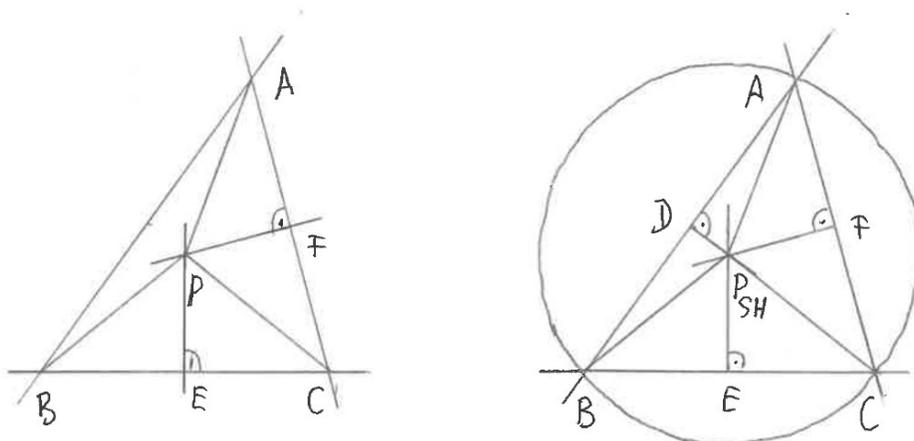
Die Dreiecke  $\Delta(P, E, C)$  und  $\Delta(P, F, C)$  haben 2 gleich lange Seiten ( $|EP| = |FP|$ , und sie haben die Seite  $[PC]$  gemeinsam), und die der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel sind beide gleich  $\pi/2$ , also gleich. Wegen Satz 15.13 (v) $\Rightarrow$ (i) sind die Dreiecke kongruent. Daher ist  $G(C, P)$  die Winkelhalbierende durch  $C$ . Es ist  $P = P_{WH}$ .

(b) Offenbar erfüllt der Kreis mit Mittelpunkt  $P_{WH}$  und Radius  $|DP_{WH}| = |EP_{WH}| = |FP_{WH}|$  die Eigenschaften in (a).  $\square$

**Satz 15.23** (Satz vom Mittelsenkrechtenschnittpunkt)

(a) Die 3 Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt  $P_{MS}$ .

(b) Es gibt einen Kreis mit Mittelpunkt  $P_{MS}$ , der durch jede Ecke des Dreiecks läuft. Es ist der Umkreis, und  $P_{MS}$  ist der Umkreismittelpunkt.



**Beweis:** (a) Seien  $D, E$  und  $F$  die Fußpunkte der Mittelsenkrechten zu den Seiten  $[AB]$ ,  $[BC]$  und  $[CA]$ . Sei  $P$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit Fußpunkten  $E$  und  $F$ .

Die Dreiecke  $\Delta(B, E, P)$  und  $\Delta(C, E, P)$  haben 2 gleich lange Seiten ( $|BE| = |EC|$ , und sie teilen die Seite  $[EP]$ ) und den gleichen davon eingeschlossenen Winkel  $\pi/2$ . Wegen des Kongruenzsatzes Satz 15.13 sind sie kongruent, und es folgt  $|BP| = |CP|$ . Analog folgt  $|CP| = |AP|$ . Man erhält  $|BP| = |AP|$ .

Die Dreiecke  $\Delta(A, D, P)$  und  $\Delta(B, D, P)$  haben 3 gleich lange Seiten ( $|BD| = |AD|$ ,  $|BP| = |AP|$ , und sie teilen die Seite  $[DP]$ ). Wegen Satz 15.13 (ii) $\Rightarrow$ (i) sind sie kongruent, und es folgt, dass  $G(D, P)$  die Mittelsenkrechte zur Seite  $[AB]$  ist. Es ist  $P = P_{MS}$ .

(b) Offenbar erfüllt der Kreis mit Mittelpunkt  $P_{MS}$  und Radius  $|AP_{MS}| = |BP_{MS}| = |CP_{MS}|$  die Eigenschaften in (b).  $\square$

### 15.3 Kreise

**Definition 15.24** (auch Notationen und Erinnerung an bekannte Begriffe)

(a) Ein *Kreis* in der Euklidischen Ebene  $E^2$  ist eine Teilmenge der Gestalt

$$K : \{x \in E^2 \mid \|x - M\| = r\},$$

wobei  $M = M(K) \in E^2$  sein *Mittelpunkt* und  $r = r(K) \in \mathbb{R}_{>0}$  sein *Radius* ist.

(b) Ein *verallgemeinerter Kreis* in  $E^2$  ist ein Kreis oder eine Gerade.

(c) Eine Gerade, die einen Kreis in 2 Punkten schneidet, ist eine *Sekante* des Kreises. Wenn  $A$  und  $B$  die Schnittpunkte sind, so ist die Strecke  $[AB]$  eine *Sehne* des Kreises.

(d) Eine Gerade, die einen Kreis in 1 Punkt schneidet, ist eine *Tangente* des Kreises.



**Bemerkungen 15.25** (i) Die Kreisgleichung  $\|x - M\| = r$  kann man mit  $x = (x_1, x_2)$  und  $M = (m_1, m_2)$  auch als

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$$

schreiben. So ist es eine *quadratische Gleichung*, keine lineare Gleichung. Kreise sind im wesentlichen die einzigen nichtlinearen Objekte, die wir in der Linearen Algebra behandeln.

(ii) Eine Verallgemeinerung von Kreisen, die *Ellipsen*, und die nah verwandten *Hyperbeln* und *Parabeln* lassen sich auch mit quadratischen Gleichungen in 2 Variablen behandeln. Nullstellenmengen von quadratischen Gleichungen in 2 Variablen werden *Quadriken* genannt. Quadriken und Kegelschnitte waren vor vielen Jahren traditionell klassische Themen am Ende der Linearen Algebra II.

(iii) Wenn man allgemeiner Nullstellenmengen von Polynomen im  $\mathbb{R}^n$  studiert, führt einen das in die (affine) reell algebraische Geometrie.

Der folgende Satz sammelt Aussagen, die anschaulich mehr oder weniger klar sind, die aber eines Beweises bedürfen.

**Satz 15.26** (a) Zu 3 verschiedenen Punkten  $A, B, C \in E^2$ , die nicht auf einer Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis  $K$  mit  $\{A, B, C\} \subset K$ . Mit anderen Worten: Der Umkreis eines Dreiecks ist eindeutig.

(b) 2 verallgemeinerte Kreise in  $E^2$  sind entweder gleich, oder sie schneiden sich in 2 oder 1 oder 0 Punkten.

(c) Zu 3 verschiedenen Punkten  $A, B, C \in E^2$  gibt es genau einen verallgemeinerten Kreis  $K$  mit  $\{A, B, C\} \subset K$ .

(d) Zu einer Geraden  $G \subset E^2$  und einem Punkt  $M \in E^2 - G$  gibt es genau einen Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , für den die Gerade eine Tangente ist. Der Schnittpunkt  $A$  von  $G$  und  $K$  ist der Fußpunkt des Lots von  $M$  auf  $G$ , und er ist der Punkt auf  $G$ , der  $M$  am nächsten ist. Die Gerade  $G$  und die Gerade  $G(M, A)$  sind orthogonal.

(e) Zu einem Kreis  $K$  und einem Punkt  $A$ , der nicht im Innern des Kreises ist, gibt es 1 oder 2 Tangenten an  $K$ , die  $A$  enthalten, 1 im Fall  $A \in K$ , 2 im Fall  $A \notin K$ . Im Fall  $A \in K$  sind die Tangente und die Gerade  $G(M, A)$  orthogonal, und die Tangente ist die Tangente an  $K$  durch  $A$ .

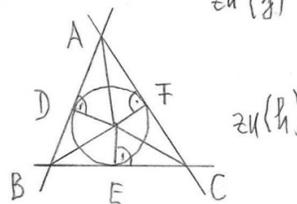
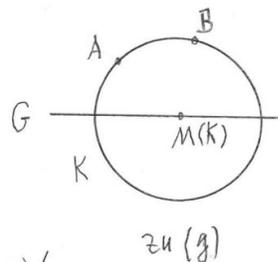
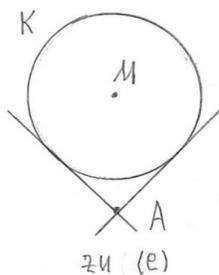
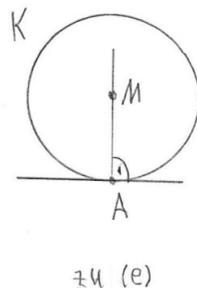
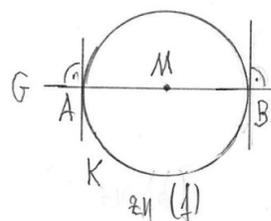
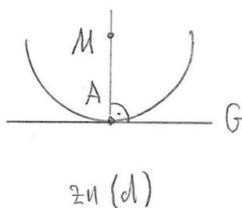
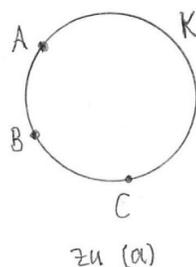
(f) Sei  $K$  ein Kreis, und sei  $G$  eine Sekante des Kreises, mit  $G \cap K = \{A, B\}$ . Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- (i)  $M(K) \in G$ .
- (ii) Die Tangente in  $A$  an  $K$  ist orthogonal zu  $G$ .
- (iii) Die Tangenten in  $A$  und in  $B$  an  $K$  sind orthogonal zu  $G$ .

In dem Fall sagt man, dass  $G$  und  $K$  orthogonal sind.

(g) Zu einer Geraden  $G$  und 2 verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  außerhalb der Geraden gibt es genau einen verallgemeinerten Kreis  $K$  mit  $\{A, B\} \subset K$ , der orthogonal zu  $G$  ist.

(h) Sei  $\Delta(A, B, C)$  ein Dreieck in  $E^2$ . Es gibt genau einen Kreis  $K$ , für den jede der Geraden  $G(A, B)$ ,  $G(B, C)$  und  $G(C, A)$  eine Tangente ist. Es ist der Inkreis.



**Beweis:** (a) Sei  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2) \in E^2$ . Gesucht sind  $M = (m_1, m_2) \in E^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$(a_1 - m_1)^2 + (a_2 - m_2)^2 = r^2, \quad (b_1 - m_1)^2 + (b_2 - m_2)^2 = r^2, \quad (c_1 - m_1)^2 + (c_2 - m_2)^2 = r^2.$$

Wenn man die Differenz von 1. und 2. Gleichung und die Differenz von 1. und 3. Gleichung und die 1. Gleichung betrachtet, erhält man das folgende äquivalente Gleichungssystem:

chungssystem:

$$2 \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|B\|^2 - \|A\|^2 \\ \|C\|^2 - \|A\|^2 \end{pmatrix}, \quad (15.5)$$

$$(a_1 - m_1)^2 + (a_2 - m_2)^2 = r^2.$$

Weil die Geraden  $G(A, B)$  und  $G(A, C)$  sich in einem Punkt  $A$  schneiden, ist die Matrix  $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}$  invertierbar. Das lineare Gleichungssystem in (15.5) hat eine eindeutige Lösung  $(m_1, m_2)^t = M^t$ . Sie gibt  $M$ . Die zweite Gleichung in (15.5),  $(a_1 - m_1)^2 + (a_2 - m_2)^2 = r^2$ , bestimmt  $r$ .

(b) 1. Fall, 2 Geraden: Wegen Satz 15.3 (c)&(d) sind 2 Geraden entweder gleich, oder sie schneiden sich in 1 oder 0 Punkten.

2. Fall, 1 Gerade und 1 Kreis: Sei  $G = P + \mathbb{R} \cdot v$  mit  $P = (p_1, p_2) \in E^2$  und  $v = (a_1, a_2) \in S^1$ , und sei  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M = (m_1, m_2) \in E^2$  und Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Ihre Schnittmenge ist

$$G \cap K = \{(p_1 + ta_1, p_2 + ta_2) \mid t \in \mathbb{R}, (p_1 + ta_1 - m_1)^2 + (p_2 + ta_2 - m_2)^2 = r^2\}.$$

Die da auftretende Gleichung für  $t$  ist eine quadratische Gleichung,

$$t^2 + t \cdot 2(a_1(p_1 - m_1) + a_2(p_2 - m_2)) + (p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2 - r^2 = 0.$$

Sie hat 2 oder 1 oder 0 Lösungen.

3. Fall, 2 Kreise: Für  $i \in \{1, 2\}$  sei  $K_i$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M_i = (m_{i1}, m_{i2})$  und Radius  $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ . Die Schnittmenge  $M_1 \cap M_2$  besteht aus den Punkten  $(x_1, x_2) \in E^2$ , die das Gleichungssystem

$$(x_1 - m_{11})^2 + (x_2 - m_{12})^2 = r_1^2, \quad (x_1 - m_{21})^2 + (x_2 - m_{22})^2 = r_2^2$$

erfüllen. Das ist äquivalent zur Differenz aus 1. und 2. Gleichung und zur 1. Gleichung, also zu

$$2(m_{21} - m_{11})x_1 + 2(m_{22} - m_{12})x_2 = \|M_2\|^2 - \|M_1\|^2 - r_2^2 + r_1^2, \quad (15.6)$$

$$(x_1 - m_{11})^2 + (x_2 - m_{12})^2 = r_1^2.$$

1. Unterfall,  $M_1 = M_2$ : Im Fall  $r_1 = r_2$  ist  $K_1 = K_2$ . Im Fall  $r_1 \neq r_2$  ist  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ .

2. Unterfall,  $M_1 \neq M_2$ : Dann ist die Lösungsmenge der 1. Gleichung in (15.6) eine Gerade, und die Lösungsmenge von (15.6) ist die Schnittmenge dieser Geraden mit dem Kreis  $K_1$ . Wir sind im schon behandelten 2. Fall.

(c) 1. Fall, die 3 Punkte liegen auf einer Geraden: Dann ist diese Gerade eindeutig. Und wegen (b) gibt es keinen Kreis, der die 3 Punkte enthält.

2. Fall, die 3 Punkte liegen nicht auf einer Geraden: Wegen (a) gibt es genau einen Kreis, der die 3 Punkte enthält.

(d) Mit einer Isometrie können wir die Gerade  $G$  und den Punkt  $M$  so zurechtlegen, dass  $G = \mathbb{R} \cdot (1, 0)$  und  $M = (0, m_2)$  mit  $m_2 > 0$  ist. Der Kreis mit Radius  $m_2$  schneidet  $G$  genau in  $A = (0, 0)$ . Die Geraden  $G$  und  $G(M, A) = \mathbb{R} \cdot (0, 1)$  sind orthogonal. Jeder Kreis mit kleinerem Radius schneidet  $G$  nicht. Jeder Kreis mit größerem Radius  $r$  schneidet  $G$  in  $(b_1, 0)$  und  $(-b_1, 0)$ , wobei  $b_1 > 0$  durch  $b_1^2 + m_2^2 = r^2$  bestimmt ist.

(e) Mit einer Isometrie können wir den Kreis  $K$  und den Punkt  $A$  so zurechtlegen, dass  $M(K) = (0, m_2)$  und  $A = (0, 0)$  ist. Dann ist  $r \leq m_2$ . Jede Gerade durch  $A$  hat die Gestalt  $G = \mathbb{R} \cdot v$  für ein  $v = (b_1, b_2) \in S^1$ . Es ist

$$\begin{aligned} G \cap K &= \{t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}, (tb_1)^2 + (tb_2 - m_2)^2 = r^2\} \\ &= \{t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}, t^2 - t \cdot 2b_2m_2 + (m_2^2 - r^2) = 0\}. \end{aligned}$$

Die Gerade ist eine Tangente an  $K$ , d.h.  $G \cap K$  besteht aus 1 Punkt, wenn die quadratische Gleichung genau eine Lösung  $t$  hat, also wenn

$$b_2^2 m_2^2 = m_2^2 - r^2, \quad \text{also } b_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{r^2}{m_2^2}}$$

ist. Im Fall  $m_2 = r$  ist  $b_2 = 0$ , also  $v = (b_1, b_2) = \pm(1, 0)$ , dann ist die Tangente  $\mathbb{R} \cdot (1, 0)$ . Im Fall  $m_2 > r$  hat man 2 Tangenten  $\mathbb{R} \cdot (\frac{r}{m_2}, \sqrt{1 - \frac{r^2}{m_2^2}})$  und  $\mathbb{R} \cdot (\frac{r}{m_2}, -\sqrt{1 - \frac{r^2}{m_2^2}})$ .

(f) Das folgt aus (e).

(g) Mit einer Isometrie können wir die Gerade  $G$  so zurechtlegen, dass  $G = \mathbb{R} \cdot (1, 0)$  ist. Sei  $A = (a_1, a_2)$  und  $B = (b_1, b_2)$ , mit  $a_2 \neq 0$  und  $b_2 \neq 0$ . Gesucht ist erstmal ein zu  $G$  orthogonaler Kreis  $K$  mit  $\{A, B\} \subset K$ . Für seinen Mittelpunkt  $M = (m_1, m_2)$  und seinen Radius erhalten wir die Gleichungen  $m_2 = 0$  (wegen (f)) und

$$(a_1 - m_1)^2 + a_2^2 = r^2, \quad (b_1 - m_1)^2 + b_2^2 = r^2.$$

Äquivalent sind (zusammen mit  $m_2 = 0$ ) die Differenz aus 1. und 2. Gleichung und die 1. Gleichung, also

$$2(b_1 - a_1)m_1 = \|B\|^2 - \|A\|^2, \quad (a_1 - m_1)^2 + a_2^2 = r^2. \quad (15.7)$$

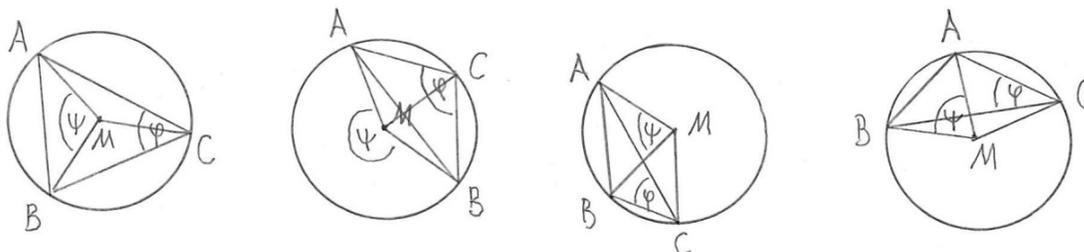
Im Fall  $a_1 = b_1$  ist  $a_2 \neq b_2$ , denn  $A \neq B$ . Also ist dann  $\|B\| \neq \|A\|$ , und das Gleichungssystem (15.7) hat keine Lösung. Dann gibt es keinen Kreis mit den gewünschten Eigenschaften. Aber dann tut's die Gerade  $G = A + \mathbb{R} \cdot (0, 1) = B + \mathbb{R} \cdot (0, 1)$ , und nur diese Gerade tut's.

Im Fall  $a_1 \neq b_1$  bestimmt die linke Gleichung in (15.7)  $m_1$  eindeutig, und dann bestimmt die rechte Gleichung in (15.7)  $r$  eindeutig. Dann gibt es einen eindeutigen Kreis mit den gewünschten Eigenschaften. Aber dann tut's keine Gerade, denn dann

sind die zu  $G$  orthogonalen Geraden durch  $A$  und  $B$  verschieden,  $A + \mathbb{R} \cdot (0, 1) \neq B + \mathbb{R} \cdot (0, 1)$ .

(h) Sei  $K$  irgendein Kreis, für den jede der Geraden  $G(A, B)$ ,  $G(B, C)$  und  $G(C, A)$  eine Tangente ist. Seien  $D, E$  und  $F$  die Fußpunkte der Lote von  $M(K)$  auf die Geraden  $G(A, B)$ ,  $G(B, C)$  und  $G(C, A)$ . Wegen (e) schneidet  $K$  die Geraden in diesen Punkten. Wie im letzten Abschnitt des Beweises von Teil (a) des Satzes 15.22 zum Winkelhalbierendenschnittpunkt sieht man, dass  $G(M, A)$ ,  $G(M, B)$  und  $G(M, C)$  die Winkelhalbierenden sind und dass  $M(K)$  der Winkelhalbierendenschnittpunkt ist. Wegen (d) ist auch der Radius von  $K$  eindeutig.  $K$  ist der Inkreis.  $\square$

**Satz 15.27** (a) (Satz vom Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel) Sei  $\Delta(A, B, C)$  ein Dreieck in  $E^2$ , bei dem man bei mathematisch positivem Umlauf auf den Seiten die Ecken in der Reihenfolge  $A, B, C$  (und nicht  $A, C, B$ ) trifft. Sei  $K$  der nach Satz 15.26 (a) eindeutige Kreis mit  $\{A, B, C\} \subset K$ . Sei  $M$  sein Mittelpunkt. Die Winkel  $\psi := \sphericalangle AMB$  und  $\varphi := \sphericalangle ACB$  heißen Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel. Sie erfüllen  $\psi = 2\varphi$ .



(b) (Satz von Thales) Situation wie in (a). Dann gilt:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \iff M \in [AB].$$

Im Fall  $M \in [AB]$  wird die Strecke  $[AB]$  auch ein Kreisdurchmesser des Kreises  $K$  genannt.

**Beweis:** (a) 1. Fall,  $M$  liegt im Innern des Dreiecks oder auf einer der Seiten  $[AB]$ ,  $[BC]$  oder  $[CA]$  oder in dem Teil des Innern des Kreises, der durch die Seite  $[AB]$  vom Innern des Dreiecks getrennt wird (1. und 2. Bild und die Fälle  $M \in [AB]$ ,  $M \in [BC]$ ,  $M \in [CA]$ ):

$$\begin{aligned} 2\varphi &= 2\sphericalangle ACB = 2(\sphericalangle ACM + \sphericalangle CMB) \\ &= (\sphericalangle ACM + \sphericalangle MAC) + (\sphericalangle MCB + \sphericalangle CBM) \\ &= (\pi - \sphericalangle CMA) + (\pi - \sphericalangle BMC) \\ &= 2\pi - \sphericalangle BMA = \psi. \end{aligned}$$

Das 3. Gleichheitszeichen benutzt, dass die Dreiecke  $\Delta(A, M, C)$  und  $\Delta(B, C, M)$  gleichschenkelig sind, und Satz 15.7 (f). Das 4. Gleichheitszeichen benutzt, dass bei einem Dreieck die Innenwinkelsumme gleich  $\pi$  ist (Satz 15.7 (d)).

2. Fall,  $M$  liegt in einem der beiden Teile des Innern des Kreises, die durch die Seite  $[CA]$  oder die Seite  $[BC]$  vom Innern des Dreiecks getrennt werden (3. und 4. Bild): Übung.

(b) Das folgt aus Teil (a) und aus der Äquivalenz  $M \in [AB] \iff \psi = \pi$ .  $\square$

**Satz 15.28** (a) Sei  $\Delta(A, B, M)$  ein gleichschenkliges Dreieck mit  $|AM| = |BM| = r$ . Sei  $P \in G(A, B) - \{A, B\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |AP| \cdot |BP| &= r^2 - |MP|^2 && \text{falls } P \in [A, B] - \{A, B\}, \\ |AP| \cdot |BP| &= |MP|^2 - r^2 && \text{falls } P \in G(A, B) - [A, B]. \end{aligned}$$

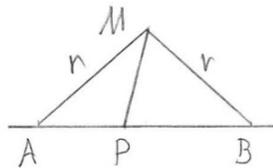


Abb. 15.28 (a)

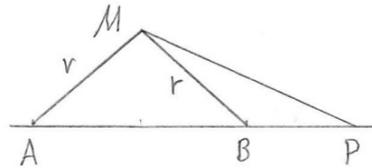
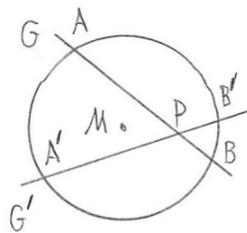


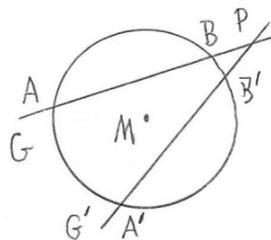
Abb. 15.28 (a)

(b) Sei  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , und seien  $G$  und  $G'$  zwei Sekanten oder Tangenten des Kreises mit  $G \cap K = \{A, B\}$  (mit  $A \neq B$ , falls  $G$  eine Sekante ist, und mit  $A = B$ , falls  $G$  eine Tangente ist) und  $G' \cap K = \{A', B'\}$ , die sich in einem Punkt  $P \in E^2$  schneiden. Dann gilt:

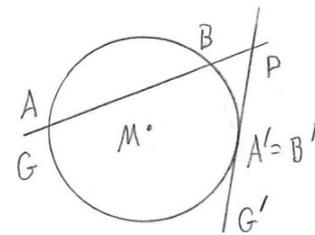
$$|AP| \cdot |BP| = |A'P| \cdot |B'P| = \begin{cases} r^2 - |MP|^2 & \text{falls } P \text{ im Innern von } K \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } P \in K \text{ ist,} \\ |MP|^2 - r^2 & \text{falls } P \text{ außerhalb von } K \text{ ist.} \end{cases}$$



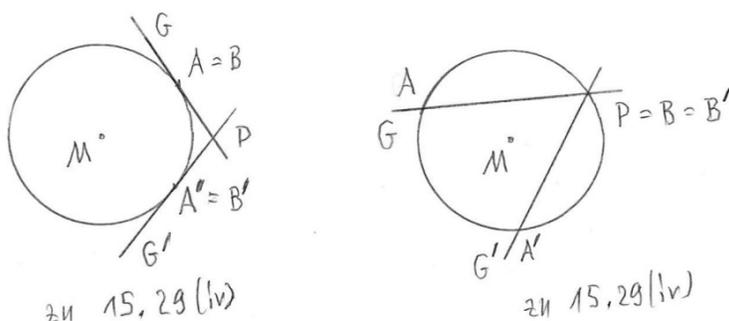
Sehnensatz



Sekantensatz



Tangentensatz



Der Beweis kommt nach den Bemerkungen 15.29.

**Bemerkungen 15.29** (i) Falls  $P$  im Innern des Kreises liegt, sind  $G$  und  $G'$  natürlich Sekanten, und die Sehnen  $[AB]$  und  $[A'B']$  schneiden sich in  $P$ . Dann heißt die linke Gleichung in Satz 15.28 (b) **Sehnensatz**.

(ii) Falls  $P$  außerhalb des Kreises liegt und  $G$  und  $G'$  Sekanten sind, heißt die linke Gleichung in Satz 15.28 (b) **Sekantensatz**.

(iii) Falls  $P$  außerhalb des Kreises liegt und  $G$  eine Sekante und  $G'$  eine Tangente ist, heißt die linke Gleichung in Satz 15.28 (b) **Tangentensatz**.

(iv) In den anderen Fällen ( $P \in K$  oder  $P$  außerhalb von  $K$  und  $G$  und  $G'$  Tangenten) hat die linke Gleichung in Satz 15.28 (b) keinen besonderen Namen.

**Beweis:** (a) Wir nehmen an, dass man bei mathematisch positivem Umlauf auf  $\Delta(A, B, M)$  die Ecken in der Reihenfolge  $A, B, M$  trifft (im Fall  $A, M, B$  muss man bloß die Bezeichnungen der Winkel unten ändern).

1. Fall  $P \in [A, B] - \{A, B\}$ : Weil das Dreieck  $\Delta(A, B, M)$  gleichschenkelig ist, und wegen Satz 15.7 (f) ist

$$\sphericalangle MBP = \sphericalangle PAM, \quad \text{also } \cos \sphericalangle MBP = \cos \sphericalangle PAM.$$

Der Kosinussatz liefert

$$\frac{|AP|^2 + r^2 - |MP|^2}{2r|AP|} = \cos \sphericalangle PAM = \cos \sphericalangle MBP = \frac{|BP|^2 + r^2 - |MP|^2}{2r|BP|},$$

also  $0 = (|AP| - |BP|)(|AP| \cdot |BP| - r^2 + |MP|^2)$ . Im Fall  $|AP| \neq |BP|$  folgt  $|AP| \cdot |BP| = r^2 - |MP|^2$ . Im Fall  $|AP| = |BP|$  ist  $P$  der Fußpunkt des Lots von  $M$  auf  $G(A, B)$ , und  $|AP| \cdot |BP| = r^2 - |MP|^2$  folgt direkt aus dem Satz von Pythagoras (Satz 15.7 (e)).

2. Fall,  $P \in G(A, B) - [A, B]$ : Wir beschränken uns auf den Fall, wo  $B$  zwischen  $P$  und  $A$  liegt. Dann ist

$$\sphericalangle PBM = \pi - \sphericalangle PAM \quad \text{also} \quad -\cos \sphericalangle PBM = \cos \sphericalangle PAM.$$

Der Kosinussatz liefert

$$\frac{|AP|^2 + r^2 - |MP|^2}{2r|AP|} = \cos \sphericalangle PAM = -\cos \sphericalangle PBM = -\frac{|BP|^2 + r^2 - |MP|^2}{2r|BP|},$$

also  $0 = (|AP| + |BP|)(|AP| \cdot |BP| + r^2 - |MP|^2)$ , also  $|AP| \cdot |BP| = |MP|^2 - r^2$ .

(b) Sei  $r$  der Radius des Kreises  $K$ .

1. Fall,  $P$  im Innern des Kreises  $K$ : Dann ist  $P \in [AB] - \{A, B\}$  und  $P \in [A'B'] - \{A', B'\}$ . Mit (a) folgt

$$|AP| \cdot |BP| = r^2 - |MP|^2 = |A'P| \cdot |B'P|.$$

2. Fall,  $P \in K$ : Dann ist  $P \in \{A, B\}$  und  $P \in \{A', B'\}$ , und

$$|AP| \cdot |BP| = 0 = |A'P| \cdot |B'P|.$$

3. Fall,  $P$  außerhalb des Kreises  $K$ : Falls  $G$  eine Sekante ist, sagt (a)  $|AP| \cdot |BP| = |MP|^2 - r^2$ . Falls  $G$  eine Tangente ist, ist  $A = B$ , und nach Satz 15.26 (e) ist  $G$  orthogonal zu  $G(M, A)$ . Mit dem Satz von Pythagoras folgt auch hier  $|AP| \cdot |BP| = r^2 - |MP|^2$ . Analog gilt immer  $|A'P| \cdot |B'P| = r^2 - |MP|^2$ . Es folgt  $|AP| \cdot |BP| = |A'P| \cdot |B'P|$ .  $\square$

## 16 Die Platonischen Körper

### 16.1 Die Platonischen Körper

**Definition 16.1** (a) Eine *Halbebene* im  $\mathbb{R}^2$  ist die Menge der Punkte im  $\mathbb{R}^2$  auf einer Seite einer Geraden im  $\mathbb{R}^2$ . Ein *konvexes Polygon* ist ein Schnitt von endlich vielen Halbebenen, der kompakt ist und innere Punkte hat (also Punkte, so dass eine kleine Kreisscheibe um sie im Polygon enthalten ist).

(b) Ein *Halbraum* im  $\mathbb{R}^3$  ist eine Menge  $H \subset \mathbb{R}^3$  der Gestalt  $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid l(x) \geq c\}$ . Hier ist  $l: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Linearform ungleich 0, und  $c \in \mathbb{R}$ . Die Punkte in  $H$  sind die Punkte auf einer Seite der Ebene  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid l(x) = c\}$ . Bemerkung: Diese Ebene ist der Rand von  $H$ .

(c) Ein *konvexes Polyeder* ist eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^3$ , die sich als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen läßt. Ein konvexes Polyeder  $A$ , das kompakt ist und innere Punkte hat (also Punkte, so daß ein kleiner Ball um sie in  $A$  enthalten ist), ist ein *Polytop*.

Bemerkung: Der Rand eines Polytops  $A$  besteht aus allen Punkten von  $A$ , die auf dem Rand von mindestens einem Halbraum in einer Darstellung von  $A$  als Schnitt von endlich vielen Halbräumen liegen.

(d) Es sei  $A$  ein Polytop. Offenbar ist der Rand von  $A$  die Vereinigung von konvexen Polygonen. Es sei  $f$  die Anzahl der Polygone auf dem Rand,  $k$  die Anzahl der *Kanten*

anf dem Rand, und  $e$  die Anzahl der *Ecken* auf dem Rand von  $A$ . (Diese Begriffe kann man auch noch formal sauber definieren, aber das sparen wir uns hier.) Weiter sei  $e_i$  für  $i \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  die Anzahl der Ecken, von denen  $i$  Kanten ausgehen, und  $f_j$  für  $j \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  sei die Anzahl der Polygone, die  $j$ -Ecke sind. Natürlich ist  $e = \sum_i e_i$  und  $f = \sum_j f_j$ .

**Satz 16.2** *Für jedes Polytop  $A$  gilt die Eulersche Polyederformel*

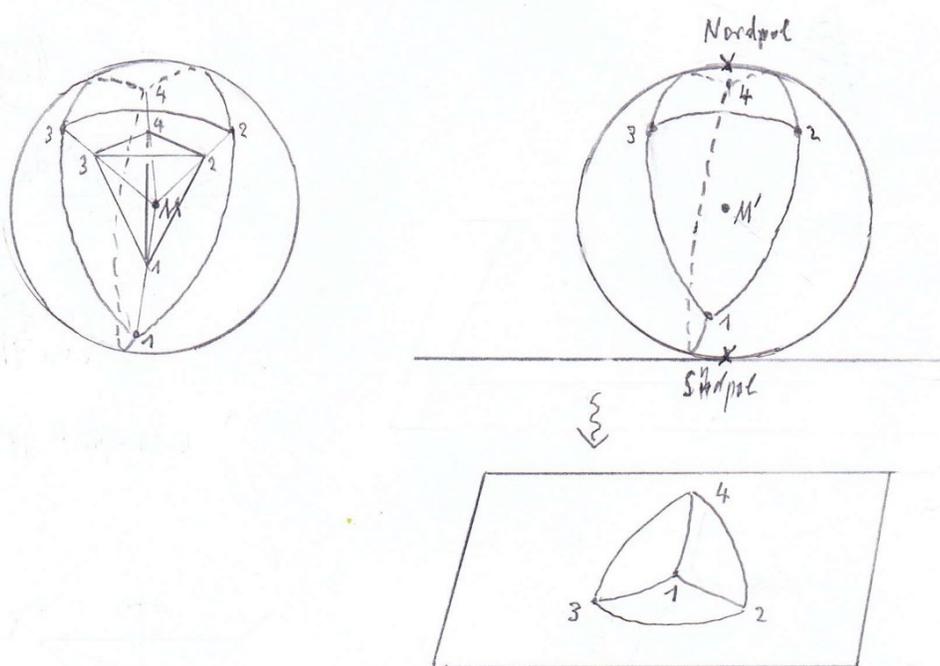
$$e - k + f = 2,$$

und es gelten die Formeln

$$2k = \sum_{i \geq 3} i \cdot e_i, \quad 2k = \sum_{j \geq 3} j \cdot f_j.$$

**Beweis:** Die zweite Formel folgt einfach, indem man von jeder Ecke aus die anliegenden Kanten zählt. Aufsummieren gibt die Zahl  $\sum_i i \cdot e_i$ . Da hat man jede Kante doppelt gezählt. Also ist  $\sum_i i \cdot e_i = 2k$ . Die dritte Formel folgt, indem man von jedem Polygon aus die Kanten auf seinem Rand zählt. Aufsummieren gibt die Zahl  $\sum_j j \cdot f_j$ . Da hat man auch jede Kante doppelt gezählt. Also ist  $2k = \sum_j j \cdot f_j$ .

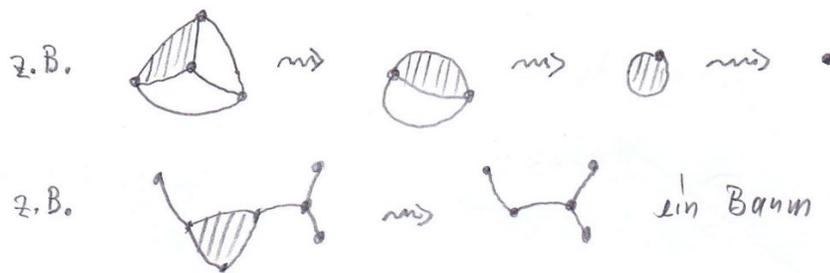
Nun wird die Eulersche Polyederformel bewiesen. Weil das Polytop konvex ist, kann man eine Sphäre im  $\mathbb{R}^3$  mit Mittelpunkt  $M$  im Innern des Polytops finden, so dass die Projektion entlang der Strahlen mit Mittelpunkt  $M$  eine Bijektion vom Rand des Polytops auf die Sphäre ist. Dabei geht das Netz der Ecken und Kanten in einen Graphen auf der Sphäre über. Nun kann man die Sphäre so verschieben und drehen, dass ihr *Südpol* (=der tiefste Punkt bezüglich der 3. Koordinate) auf der Ebene  $\mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_2$  liegt und Mittelpunkt  $M'$  hat und dass der *Nordpol* (=der höchste Punkt bezüglich der 3. Koordinate) nicht auf einer Kante oder Ecke des Graphen liegt. Die Projektion entlang der Strahlen vom *Nordpol* aus bildet die Sphäre ohne ihren Nordpol bijektiv auf die Ebene  $\mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_2$  ab. Der Graph auf der Sphäre geht in einen Graphen auf der Ebene über.



Beim Graphen auf der Ebene ist  $f$  die Anzahl der Flächen inklusive der *äußeren Fläche*,  $k$  ist die Anzahl der Kanten, und  $e$  ist die Anzahl der Ecken.

Die Eulersche Polyederformel gilt nun für einen beliebigen zusammenhängenden Graphen in der Ebene. Man beweist sie leicht durch Induktion über die Anzahl  $f + k + e$ . Man zieht bei einem Graphen mit mindestens zwei Flächen eine Fläche inklusive aller Kanten und Ecken auf dem Rand dieser Fläche zu einem Punkt zusammen. Weil man auf dem Rand einer Fläche gleich viele Kanten und Ecken hat, bleibt die Zahl  $e - k + f$  unverändert.

So macht man weiter, bis man nur noch die äußere Fläche hat. Dann ist der Graph nur noch ein Baum (ein Graph ohne Zykel – der Begriff ist selbsterklärend). Hier ist offenbar  $e = k + 1$  und  $f = 1$ , also  $e - k + f = 2$ .



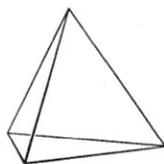
(Ein Graph wie in der zweiten Reihe links tritt natürlich bei einem Polytop nicht auf. Aber auch für ihn gilt die Eulersche Polyederformel.)  $\square$

**Definition 16.3** (a) Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Ein reguläres  $n$ -Eck in einer Euklidischen Ebene ist ein  $n$ -Eck, dessen Kanten alle gleich lang sind, und dessen Innenwinkel alle gleich groß (also gleich  $\pi \cdot \frac{n-2}{n}$ ) sind (denn die Innenwinkelsumme in einem  $n$ -Eck ist  $(n-2)\pi$ ).

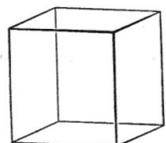
(b) Ein *Platonischer Körper* ist ein Polytop, so dass es ein  $n$  und ein  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  gibt, so dass alle Flächen im Rand des Polytops reguläre  $n$ -Ecke sind und so dass in jeder Ecke  $m$  reguläre  $n$ -Ecke aneinanderstoßen.

Bemerkungen: Dann ist  $f = f_n$  und  $e = e_m$ . Alle Kanten sind automatisch gleich lang.

**Satz 16.4** (Bekannt seit der Antike) *Es gibt nach Wahl der Kantenlänge bis auf Drehungen und Verschiebungen im 3-dimensionalen Euklidischen Raum genau 5 Platonische Körper. Hier sind Bilder von ihnen und ihre Namen. Der Würfel heißt auch Hexaeder.*



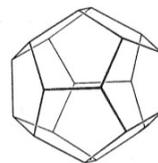
Tetraeder



Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

Die folgende Tabelle gibt die Zahlen  $m, n, e, k, f$  (auswendig lernen):

$m$	$n$	$e = e_m$	$k$	$f = f_n$	
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel = Hexaeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

Die Flächenmittelpunkte eines Platonischen Körpers sind die Ecken eines anderen Platonischen Körpers. Das gibt eine Dualität zwischen Würfel und Oktaeder, eine Dualität zwischen Dodekaeder und Ikosaeder und eine Selbstdualität des Tetraeders.

**Beweis:** Sowohl Existenz als auch Eindeutigkeit der 5 Platonischen Körper müssen bewiesen werden.

Sei  $A$  ein Platonischer Körper, dessen Rand aus regulären  $n$ -Ecken für ein festes  $n \geq 3$  besteht und bei dem in jeder Ecke  $m \geq 3$  reguläre  $n$ -Ecke aneinanderstoßen. Beim regulären  $n$ -Eck ist jeder Innenwinkel gleich  $\pi \cdot \frac{n-2}{n}$ . Es muß  $m \cdot \pi \cdot \frac{n-2}{n} < 2\pi$  sein. Das schließt  $n \geq 6$  aus und läßt nur die Möglichkeiten

$$(m, n) \in \{(3, 3), (4, 3), (5, 3), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Bemerkung: Man kommt auf diese 5 Fälle auch mit den Formeln von Satz 16.2:  
 $e = e_m$ ,  $f = f_n$ ,  $me_m = 2k = nf_n$ ,

$$\frac{2}{\min(m, n)} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{e}{2k} + \frac{f}{2k} = \frac{2+k}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2},$$

also  $\min(m, n) < 4$ , also  $\min(m, n) = 3$ , und

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\max(m, n)} + \frac{1}{\min(m, n)} = \frac{1}{\max(m, n)} + \frac{1}{3}, \quad \text{also}$$

$$\frac{1}{\max(m, n)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \text{also } \max(m, n) \leq 5.$$

In jedem dieser 5 Fälle kann man eine Pyramide aus  $m$  regulären  $n$ -Ecken bilden, deren Basis ein reguläres  $m$ -Eck ist. Dann gibt es eine eindeutige Sphäre, so daß alle Ecken der  $m$  regulären  $n$ -Ecke auf dieser Sphäre liegen. Das folgt aus den Rechnungen auf Blatt 1 (LA IIb, FSS 2020).

So eine kreisförmige Anordnung von  $m$  regulären  $n$ -Ecken um eine Ecke wird nun kurzzeitig eine *Haube* genannt. Es ist klar, dass man an eine Haube weitere Hauben ankleben kann, so dass die äußeren Ecken der ersten Haube mittlere Ecken der neuen Hauben sind. Weiterhin liegen alle Ecken auf derselben Sphäre.

Es ist ziemlich klar, dass man bei Fortsetzung dieses Anklebens weiterer Hauben nicht immer neue Hauben erhält, die irgendwann ältere Hauben durchdringen, sondern dass sich die Hauben zum Rand eines Polytops zusammenfügen. Beim Tetraeder, Würfel und Oktaeder ist man schnell fertig. Beim Ikosaeder hat man nach der 2. Generation von Hauben schon 15 Dreiecke beisammen und ein reguläres Fünfeck als Rand. Man sieht, dass das Ankleben von Hauben mit den Ecken des Fünfecks als Mittelpunkten das Gebilde zum Ikosaeder schließt. Beim Dodekaeder fängt man vielleicht am besten mit 5 Hauben an, deren Mittelpunkte die Ecken eines Fünfecks  $F$  sind. Nach Ankleben von 5 weiteren Hauben, deren Mittelpunkte die 5 Ecken sind, die durch je eine Kante mit den Ecken des Fünfecks  $F$  verbunden sind, hat man ein Gebilde, dessen Rand ein reguläres Fünfeck ist. Damit ist man fertig und hat das Dodekaeder konstruiert.

Im Fall von Tetraeder, Würfel und Dodekaeder liegen an einer Ecke nur je 3  $n$ -Ecke. Da kann man die Hauben nicht deformieren. Daher sind alle Tetraeder, Würfel bzw. Dodekaeder *kongruent*, das heißt, sie lassen sich durch Drehungen und Verschiebungen ineinander überführen.

Beim Oktaeder hat man einen Freiheitsgrad, mit dem man eine Haube deformieren kann. Aber die Basis einer deformierten Haube liegt nicht mehr in einer Ebene. Man sieht leicht, dass man deformierte Hauben nicht zu einem (deformierten) Oktaeder zusammensetzen kann. Beim Ikosaeder hat man zwei (!) Freiheitsgrade, mit denen man eine Haube deformieren kann. Da ist es weniger leicht zu sehen, dass man deformierte Hauben nicht zu einem (deformierten) Ikosaeder zusammensetzen kann. Der Beweis wird hier nicht ausgeführt. Mit undeformierten Hauben kommt man auch beim Oktaeder und beim Ikosaeder nur zu kongruenten Körpern.

Die letzte Aussage des Satzes, dass die Flächenmittelpunkte eines Platonischen Körpers die Ecken eines anderen sind, und welche Platonischen Körper dadurch dual zueinander sind, sieht man direkt.  $\square$

**Satz 16.5** (a) (Definition) Seien nun  $P_T, P_O$  und  $P_I$  je ein fest gewähltes Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder im Euklidischen Vektorraum  $M(3 \times 1, \mathbb{R})$  mit Mittelpunkt gleich dem Nullpunkt. Die Untergruppen der  $SO(3, \mathbb{R})$  der Drehungen, die  $P_T$  bzw.  $P_O$  bzw.  $P_I$  auf sich abbilden, werden  $\text{Sym}_{or}(P_T)$  bzw.  $\text{Sym}_{or}(P_O)$  bzw.  $\text{Sym}_{or}(P_I)$  genannt.

Notation: Sie sind Gruppen vom Typ  $\mathcal{T}$  bzw.  $\mathcal{O}$  bzw.  $\mathcal{I}$ . Diese Symbole bezeichnen auch ihre Konjugationsklassen in  $SO(3, \mathbb{R})$ .

(b) Wegen der Dualität zwischen Oktaeder und Würfel ist  $\text{Sym}_{or}(P_O)$  auch die Gruppe der Drehungen, die den Würfel auf sich abbilden, dessen Ecken die Flächenmittelpunkte von  $P_O$  sind. Wegen der Dualität zwischen Ikosaeder und Dodekaeder ist  $\text{Sym}_{or}(P_I)$  auch die Gruppe der Drehungen, die den Dodekaeder auf sich abbilden, dessen Ecken die Flächenmittelpunkte von  $P_I$  sind.

(c) In jedem der 3 Fälle sei

$X :=$  Anzahl der Drehachsen eines Typs,

$Y :=$  Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs.

(Die folgenden Tabellen erklären, was mit Drehachsen eines Typs gemeint ist.) Die folgenden Tabellen sagen einiges über die 3 Symmetriegruppen in (a) aus.

Tetraeder  $P_T$ :

$X$	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	$Y$
–	–	0	(id :) 1
4	durch Ecken und gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$
3	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	$\pi$	$3 \cdot 1 = 3$

$$\Rightarrow |\text{Sym}_{or}(P_T)| = 1 + 8 + 3 = 12.$$

Oktaeder  $P_O$ :

$X$	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	$Y$
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	$\pi$	$6 \cdot 1 = 6$
4	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

$$\Rightarrow |\text{Sym}_{or}(P_O)| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$$

Icosaeder  $P_I$ :

$X$	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	$Y$
—	—	0	(id :) 1
6	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$	$6 \cdot 4 = 24$
15	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	$\pi$	$15 \cdot 1 = 15$
10	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$10 \cdot 2 = 20$

$$\Rightarrow |\text{Sym}_{or}(P_I)| = 1 + 24 + 15 + 20 = 60.$$

(d) Als abstrakte Gruppen sind die Gruppen zu folgenden (Unter)Gruppen symmetrischer Gruppen isomorph:

$$\text{Sym}_{or}(P_T) \cong A_4,$$

$$\text{Sym}_{or}(P_O) \cong S_4,$$

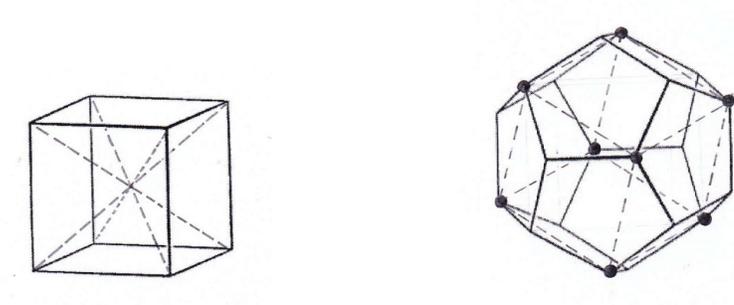
$$\text{Sym}_{or}(P_I) \cong A_5.$$

**Beweisskizze:** (a) Definition. (b) Das sieht man. (c) Das sieht man.

(d) Bei  $\text{Sym}_{or}(P_T)$  werden die 4 Ecken des Tetraeders permutiert. Man sieht leicht, dass die Drehungen genau die geraden Permutationen geben.

Bei  $\text{Sym}_{or}(P_O)$  muß man die Operation auf den 4 Raumdiagonalen im Würfel ansehen. Jedes Element von  $\text{Sym}_{or}(P_O)$  permutiert diese. Wegen  $|\text{Sym}_{or}(P_O)| = 24 = |S_4|$  wird jede Permutation als Drehung realisiert.

Bei  $\text{Sym}_{or}(P_I)$  muß man zuerst einmal wissen und verstehen, dass es im Dodekaeder genau 5 regelmäßige Würfel gibt, deren Ecken Ecken des Platonischen Körpers sind. Diese werden durch die Drehungen in  $\text{Sym}_{or}(P_I)$  permutiert. Es erfordert aber noch Anstrengung zu sehen, daß genau die geraden Permutationen realisiert werden. Das wird hier nicht geleistet.  $\square$



**Bemerkungen 16.6** (i) In Aufgabe 3 von Blatt 3 im FSS 2020 wird gezeigt, dass die Abbildung

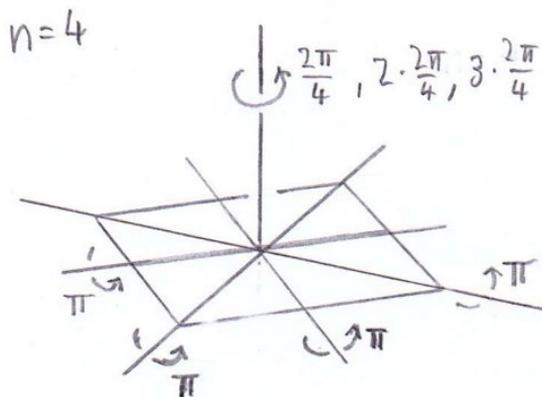
$$\Psi : O(2, \mathbb{R}) \rightarrow SO(3, \mathbb{R}), \quad A \mapsto B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix},$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist und folgendes erfüllt: Beschreibt  $A$  eine Drehung um einen Winkel  $\alpha$ , so beschreibt  $B$  eine Drehung an der Drehachse  $\mathbb{R} \cdot e_3^{(3)}$  um den Winkel  $\alpha$ . Beschreibt  $A$  eine Spiegelung an der Achse  $c_1 e_1^{(2)} + c_2 e_2^{(2)} \in \mathbb{R}^2$  (mit  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ), so beschreibt  $B$  eine Drehung an der Drehachse  $c_1 e_1^{(3)} + c_2 e_2^{(3)} \in \mathbb{R}^3$  um den Winkel  $\pi$ .

(ii) Damit kann man die endlichen Untergruppen von  $O(2, \mathbb{R})$ , die ja in Satz 14.8 beschrieben waren, in  $SO(3, \mathbb{R})$  einbetten.

Die Gruppe  $\Psi(C_n^{(2)}) \subset SO(3, \mathbb{R})$  ist die Gruppe der Drehungen mit Drehachse  $\mathbb{R} \cdot e_3^{(3)}$  und Drehwinkeln  $2\pi \frac{k}{n}$  mit  $0 \leq k < n$ . Ihr Konjugationsklasse in  $SO(3, \mathbb{R})$  wird mit  $C_n^{(3)}$  bezeichnet. Die Gruppen in dieser Konjugationsklasse unterscheiden sich nur durch die jeweilige Drehachse.

Ist  $G \subset O(2, \mathbb{R})$  eine Gruppe vom Typ  $D_{2n}^{(2)}$ , also eine Diedergruppe, die neben  $C_n^{(2)}$  noch  $n$  Spiegelungen enthält, so ist  $\Psi(G)$  eine Diedergruppe ganz aus Drehungen. Die Untergruppe  $\Psi(C_n^{(2)})$  ist vom Typ  $C_n^{(3)}$ . Die weiteren Drehungen sind Drehungen um  $\pi$  an Achsen in der Ebene senkrecht zur Drehachse  $\mathbb{R} \cdot e_3^{(3)}$  von  $\Psi(C_n^{(2)})$ . Die Konjugationsklasse in  $SO(3, \mathbb{R})$  von  $\Psi(G)$  wird mit  $D_{2n}^{(3)}$  bezeichnet. Jede Gruppe in  $D_{2n}^{(3)}$  ist die Gruppe aller Drehungen des  $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ , die ein festes reguläres  $n$ -Eck mit Mittelpunkt 0 (in einer Ebene) im  $M(3 \times 1, \mathbb{R})$  auf sich abbilden. (So ein reguläres  $n$ -Eck ist ein Polyeder ohne innere Punkte.)



**Satz 16.7** (Hier ohne Beweis) Die einzigen Konjugationsklassen endlicher Untergruppen von  $SO(3, \mathbb{R})$  sind die Klassen  $C_n^{(3)}$  ( $n \geq 1$ ),  $D_{2n}^{(3)}$  ( $n \geq 2$ ),  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{I}$ .

Einen Beweis findet man z.B. im Buch *Algebra* von M. Artin (Birkhäuser Verlag, 1998, im Abschnitt 5.9).

## 16.2 Zwei Experimente zu $SU(2)$ und $SO(3, \mathbb{R})$

### Beispiel 16.8

$$\begin{aligned}
 SU(2) &= \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär und } \det A = 1\} \\
 &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1, \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \\
 &\approx \text{(als Menge)} \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1\} \\
 &= S^3 \quad (3\text{-Sphäre im } \mathbb{R}^4).
 \end{aligned}$$

**Bemerkungen 16.9** Zur Geometrie von  $SO(3, \mathbb{R})$  gibt es zwei schöne Experimente. Für eine saubere Diskussion braucht man Begriffe der *Topologie*, siehe unten 16.10. Aber man kann die Experimente auch ohne diese Begriffe ganz gut verstehen, und es lohnt sich.

**Das 1. Experiment:** Man legt ein Buch auf einen (etwa den rechten) Handteller und dreht es immer weiter in einer Richtung in der horizontalen Ebene. Dabei hält man den Oberkörper gerade, nimmt aber eine Zeitlang Verdrillungen des Armes und der Hand in Kauf und führt das Buch sogar unter der Armbeuge durch.

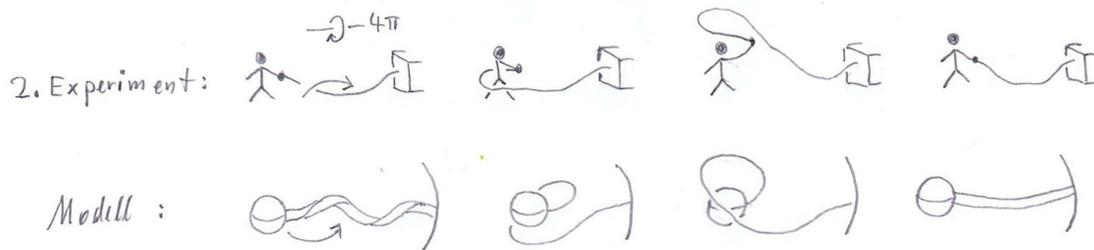


Nachdem das Buch um insgesamt  $4\pi$  gedreht worden ist, ist der Arm wieder entspannt in der Ausgangslage.

Warum bei  $4\pi$ ? Warum überhaupt? Warum nicht schon bei  $2\pi$ ?

Um das zu verstehen, wird das Experiment gleich in Mathematik übersetzt.

**Das 2. Experiment:** Man hängt ein geschlossenes Band von 5-10 Metern Länge um einen Stuhl, hält es mit der linken Hand und stellt sich so, dass es einigermaßen gespannt ist. Dann verdrillt man es (mit Hilfe der rechten Hand) nach rechts um  $4\pi$  und hält es ab da und bis zum Ende des Experiments wieder mit der linken Hand fest. Nun steigt man von rechts nach links über das Band und führt das Band hintenrum über den Kopf nach vorne. Der Oberkörper bleibt dem Stuhl zugewandt. Am Ende ist das Band unverdrillt vor einem.



Dieses 2. Experiment ist nah verwandt zum 1. Experiment. Im folgenden wird nur das 1. Experiment diskutiert.

**Übersetzen des 1. Experiments in Formeln:** Man hat einen Zeit-Parameter  $t \in [0, 1] =: I$  ( $I$  steht für Intervall) und einen Parameter  $x \in I$  für die Punkte auf einer gewählten Kurve, die vom Buchmittelpunkt durch Hand und Arm bis zu einem Punkt in der Schulter läuft.

Dann hat man erst einmal eine stetige Positionsfunktion

$$P : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, t) \mapsto P(x, t),$$

die zu jedem Zeitpunkt die Lage im  $\mathbb{R}^3$  des Punktes  $x$  der Kurve im Arm zum Zeitpunkt  $t$  angibt. Man hat aber auch eine stetige Verdrillungsfunktion

$$G : I \times I \rightarrow SO(3, \mathbb{R}), (x, t) \mapsto G(x, t),$$

die zu jedem Zeitpunkt angibt, wie sehr der Arm am Punkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  gegenüber seiner Ausgangslage zum Zeitpunkt 0 verdreht worden ist.

Tatsächlich ist die Funktion  $P$  irrelevant. Wir vergessen sie ab jetzt. Die Funktion  $G$  ist dagegen entscheidend. Sie muß folgende Zusatzbedingungen erfüllen:

$G(1, t) = E_3$  : der Punkt in der Schulter wird nicht verdreht;

$$G(0, t) \in \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} =: S_{hor}^1 :$$

das Buch wird nur horizontal gedreht;

$G(x, 0) = E_3$  : zum Referenzzeitpunkt  $t = 0$  ist natürlich nichts verdreht;

$G(x, 1) = E_3$  : zum Zeitpunkt  $t = 1$  ist der Arm wieder in Ausgangslage.

Die geschlossene Kurve  $S_{hor}^1 \subset SO(3, \mathbb{R})$  ist natürlich eine Untergruppe der  $SO(3, \mathbb{R})$ , und das Bild einer bijektiven und stetigen Abbildung  $S^1 \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ .

**Formalisierung der Fragen oben (warum  $4\pi$ ? etc):** Nun kann man ansetzen, daß man eine stetige Funktion  $g : I \rightarrow S_{hor}^1$  mit  $g(1) = g(0) = E_3$  gegeben habe. Sie beschreibt einen Kandidaten für eine Familie (in einem Zeit-Parameter) von Verdrehungen des Buches auf dem Handteller.

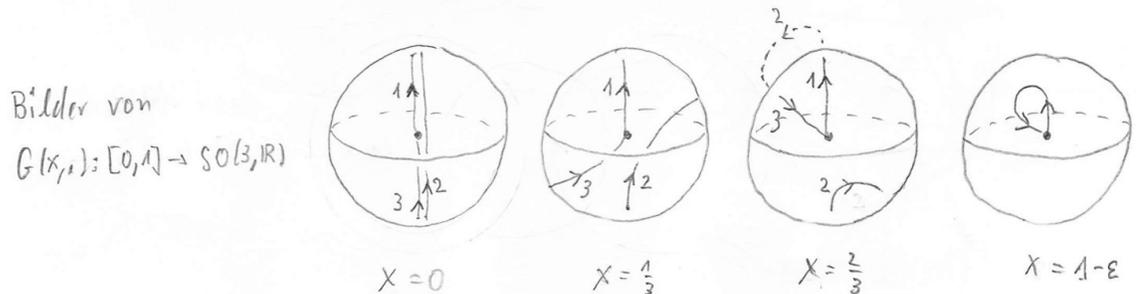
Zu so einer Funktion gibt es eine eindeutige stetige Funktion

$$\alpha[g] : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha[g](t) & -\sin \alpha[g](t) & 0 \\ \sin \alpha[g](t) & \cos \alpha[g](t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha[g](0) = 0.$$

Dann ist die *Gesamtverdrehung* zu  $g$  definiert als  $\alpha[g](1)$ , und das ist ein Vielfaches von  $2\pi$ . Der folgende Satz beantwortet die Fragen und erklärt das Experiment.

**Satz:** Zu einem  $g$  wie oben gibt es genau dann ein  $G$  wie oben mit  $g = G(0, \cdot)$ , wenn die Gesamtverdrehung  $\alpha[g](1)$  von  $g$  ein Vielfaches von  $4\pi$  ist.

Beweisidee zu  $\Leftarrow$ : Es reicht, die spezielle (aber typische) Abbildung  $g$  mit  $\alpha[g](t) = 4\pi \cdot t$  zu betrachten. Man muß eine Familie  $G(x, \cdot)$  von Wegen in  $SO(3, \mathbb{R})$  finden, die den Weg  $g = G(0, \cdot)$  stetig in den "trivialen" Weg  $G(1, \cdot) : I \rightarrow \{E_3\}$  deformiert. Daß das geht, zeigt folgendes Bild.



Zu  $\Rightarrow$ : Man muß einsehen, daß es im Fall der Abbildung  $g$  mit  $\alpha[g](t) = 2\pi \cdot t$  keine solche Familie von Wegen gibt. Das ist nach der Skizze zwar schon ein bisschen anschaulich. Aber bewiesen werden soll es hier nicht.  $(\square)$

**Bemerkungen 16.10** Begriffe, die hinter den Experimenten in 16.9 stehen:

(i) Für jede Teilmenge  $Y$  des  $\mathbb{R}^N$  (und allgemeiner für jeden *topologischen Raum*  $Y$ ) und jeden Punkt  $y \in Y$  kann man eine *Fundamentalgruppe*  $\pi_1(Y, y)$  folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} \Omega(Y, y) &:= \{g : I \rightarrow Y \mid g \text{ stetig}, g(0) = g(1) = y\} \\ &= \text{die Menge der geschlossenen Wege in } Y \\ &\quad \text{mit Anfangs- und Endpunkt } y, \end{aligned}$$

eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\Omega(Y, y)$ :

$$f \sim g \iff \text{Def } \exists G : I \times I \rightarrow Y \text{ stetig, so daß gilt:}$$

$$G(0, t) = f(t), \quad G(1, t) = g(t), \quad G(x, 0) = G(x, 1) = y.$$

$$\pi_1(Y, y) := \Omega(Y, y) / \sim.$$

Auf  $\Omega(Y, y)$  ist folgende Verknüpfung definiert: Bei  $f, g \in \Omega(Y, y)$  ist  $f \circ g \in \Omega(Y, y)$  die Abbildung mit

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Lemma:  $[f_1] = [f_2], [g_1] = [g_2] \Rightarrow [f_1 \circ g_1] = [f_2 \circ g_2]$ .

Daher hat man eine Gruppenstruktur auf  $\pi_1(Y, y)$ .

In diesem Rahmen kann man das Problem in 16.9 gut verstehen. Die Bewegung des gesamten Armes gibt eine Deformation der Bewegung des Buches zur trivialen Bewegung der Punktes in der Schulter. Ein geschlossener Weg in  $SO(3, \mathbb{R})$  ist genau dann mit dem Handteller und dem Arm ausführbar, wenn seine Klasse in  $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), E_3)$  trivial ist. Eine Umformulierung und Präzisierung des Satzes oben ist der folgende Satz.

**Satz:**  $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), E_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , und  $[g] \cong [\frac{\alpha[g](1)}{2\pi} \bmod 2\mathbb{Z}] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Also ist die Klasse  $[g]$  in  $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), E_3)$  von  $g : I \rightarrow S_{hor}^1$  wie oben genau dann trivial, wenn  $\alpha[g](1) \in 4\pi\mathbb{Z}$  ist.

(ii) Der Beweis dieses Satzes benutzt eine natürliche 2-zu-1-Abbildung  $S^3 \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ , die man erhält, wenn man  $S^3$  aus zwei Kopien von  $\overline{D^3}$  zusammensetzt (etwas analoges geht auch in den Dimensionen 1 und 2). Diese Abbildung ist die *universelle Überlagerung* von  $SO(3, \mathbb{R})$ , und es ist  $\pi_1(S^3, pt) \cong \{1\}$ . Auch die Beschreibung  $SU(2) \approx S^3$  in 16.8 paßt ins Bild. Die induzierte Abbildung  $SU(2) \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$  ist ein Gruppenhomomorphismus, und sie läßt sich präzis mit den *Hamilton-Quaternionen* beschreiben.