Aufgabe 1 (2+2+1+1+2+1=9 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Geben Sie die rekursive Definition der *Fibonacci-Zahlen* und das Tupel $(F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7)$ der ersten acht Werte an.

(b) Was ist ein *Euklidischer Ring*?

(c) Wann erbt die Menge G/U der Linksnebenklassen einer Gruppe G nach einer Untergruppe U von G die Eigenschaft, eine Gruppe zu sein?

(d) Jedes Ideal in $K[x]$ ist ein Hauptideal, hat also die Gestalt $(f(x))$ für ein Polynom $f(x)$. Wann ist so ein Ideal maximal?

(e) Was ist das *Minimalpolynom* $M_f(t) \in K[t]$ eines Endomorphismus $f : V \to V$ eines n-dimensionalen K-Vektorraums V $(n \in \mathbb{N})$?

(f) Was ist eine *Semilinearform* auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V?

.

Aufgabe 2 (4+2=6 Punkte) erhaltene Punkte:

Wenn man im Körper $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[t]/(t^3+t+1)$ $\alpha := [t]$ schreibt, so ist $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2 \cdot 1 \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha^2$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit Basis $1, \alpha, \alpha^2$, und es gilt $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$, also $\alpha^3 = \alpha + 1$. Das reicht, um in $\mathbb{F}_8$ zu rechnen.

(a) Berechnen Sie die Potenzen $\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$ und α^7, d.h. rechnen Sie sie in Linearkombinationen der Basis $1, \alpha, \alpha^2$ von $\mathbb{F}_8$ als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum um.

(b) In $\mathbb{F}_2[t]$ ist $t^7+1 = (t+1)(t^3+t+1)(t^3+t^2+1)$, und in $\mathbb{F}_8[t]$ ist $t^7+1 = \prod_{a \in \mathbb{F}_8 - \{0\}}(t-a)$ (das brauchen Sie beides nicht zu beweisen). Das Polynom $t+1$ hat in $\mathbb{F}_8$ die Nullstelle 1. Eine der drei Nullstellen in $\mathbb{F}_8$ des Polynoms t^3+t+1 ist natürlich α. Bestimmen Sie die anderen beiden Nullstellen in $\mathbb{F}_8$ des Polynoms t^3+t+1. Führen Sie Rechnungen/Argumente aus, die das belegen.

Aufgabe 3 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Bestimmen Sie eine Lösung b des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 2 \bmod 3 \\ b &\equiv 3 \bmod 5 \\ b &\equiv 5 \bmod 7 \end{aligned}$$

Skizzieren Sie auch Ihren Lösungsweg.

Aufgabe 4 (6 Punkte) erhaltene Punkte:

Die 3×3-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$
hat zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$ mit $P_A(t) = (t - \lambda_1)^2 \cdot (t - \lambda_2)$.

Bestimmen Sie (mit Rechnungen, nicht mit Zitaten aus Übungsaufgaben der Vorlesung) die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und Erzeugende der Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$ und $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)$ und des Hauptraums $\mathrm{Hau}(A, \lambda_1)$.

Aufgabe 5 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Die 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$$

ist symmetrisch. Sie definiert durch $(a, b) \mapsto a^{tr} \cdot A \cdot b$ eine symmetrische Bilinearform Bil_A auf dem Spaltenvektorraum $M(2 \times 1, \mathbb{Q}) =: V$.

Bestimmen Sie die Menge $\{a \in M(2 \times 1, \mathbb{Q}) - \{0\} \,|\, \mathrm{Bil}_A(a, a) = 0\}$ der isotropen Vektoren von Bil_A und das Radikal $\mathrm{Rad}(\mathrm{Bil}_A) = \{a \in M(2 \times 1, \mathbb{Q}) \,|\, \mathrm{Bil}_A(., a) = 0\}$ von $\mathrm{Bil}A$.

Aufgabe 6 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$ und $P_f(t) = \prod_{j=1}^{l}(t-\lambda_j)^{d_j}$ für gewisse (paarweise verschiedene) $\lambda_1, ..., \lambda_l \in K$ und gewisse $d_1, ..., d_l \in \mathbb{N}$. Nach Satz 12.10 und Lemma 12.11 ist V die direkte Summe seiner Haupträume, $V = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathrm{Hau}(f, \lambda_j)$, und $\mathrm{Hau}(f, \lambda_j) = \ker(f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^{d_j}$.

Zeigen Sie in dieser Situation den Satz von Cayley und Hamilton.

Aufgabe 7 (1+3+1+2+3=10 Punkte) erhaltene Punkte:

Sei $m \in \mathbb{N}$. Das m-te Kreisteilungspolynom $\Phi_m(x)$ ist definiert durch

$$\Phi_m = \Phi_m(x) := \prod_{a \in \mathbb{Z}_m^*} (x - e^{2\pi i a/m}) \in \mathbb{C}[x].$$

Φ_m ist offenbar unitär und erfüllt $\deg \Phi_m = \varphi(m)$. Tatsächlich ist $\Phi_m \in \mathbb{Z}[x]$, und es ist in $\mathbb{Z}[x]$ und in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Und die Kreisteilungspolynome lassen sich rekursiv mit folgender Formel berechnen:

$$x^m - 1 = \prod_{d \in \mathbb{N}:\ d|m} \Phi_d.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist ein Beweis, dass im Fall von zwei verschiedenen Primzahlen p und q alle Koeffizienten von Φ_{pq} in $\{0, 1, -1\}$ sind.

Für die Bearbeitung einer Teilaufgabe braucht man eventuell Ergebnisse früherer Teilaufgaben, aber nicht deren Beweise. Teil (a) ist leicht. Auch die Teile (b) (geometrische Reihe und Partialsumme), (c) und (d) sind nicht so schwer.

(a) Zeigen Sie $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$.

(b) Zeigen Sie $\Phi_{pq}(x) = (1 - x) \cdot \left(\sum_{a=0}^{q-1} x^{ap}\right) \cdot \left(\sum_{b=0}^{\infty} x^{bq}\right)$.

(c) Zeigen Sie $\Phi_{pq}(x) = (1 - x) \cdot \left(\sum_{(a,b) \in (\mathbb{Z} \cap [0,q-1]) \times \mathbb{N}_0} x^{ap+bq}\right)$.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g : (\mathbb{Z} \cap [0, q-1]) \times (\mathbb{Z} \cap [0, p-1]) \to \mathbb{N}_0, \quad g(a, b) = ap + bq,$$

injektiv ist.

(e) Zeigen Sie

$$\Phi_{pq}(x) = \sum_{m \in \mathrm{Bild}(g) \cap [0,(p-1)(q-1)]} x^m - \sum_{m \in \mathrm{Bild}(g) \cap [0,(p-1)(q-1)-1]} x^{m+1}.$$

Bemerkung: Mit der in der 1. Klausur bewiesenen Formel $\Phi_{p^{n_1}q^{n_2}}(x) = \Phi_{pq}(x^{p^{n_1-1}q^{n_2-1}})$ für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ folgt, dass auch $\Phi_{p^{n_1}q^{n_2}}(x)$ nur Koeffizienten in $\{0, 1, -1\}$ hat. Tatsächlich ist $\Phi_{3\cdot 5\cdot 7}$ das kleinste (bezüglich des Grades) Kreisteilungspolynom, bei dem nicht alle Koeffizienten in $\{0, 1, -1\}$ sind.

.

.