Lösungen der 2. Klausur am 17.09.2020 zur Linearen Algebra IIa

1. *(2+2+1+1+2+1=9 Punkte)*

   (a) Rekursive Definition: $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. $(F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)$.

   (b) Ein Euklidischer Ring ist ein Integritätsring R mit Eins und mit einer Gradfunktion $w : R - \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass Division mit Rest möglich ist, d.h. zu $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit $a = qb + r$ und $(r = 0$ oder $w(r) < w(b))$.

   (c) G/U ist eine Gruppe, falls U ein Normalteiler ist.

   (d) Ein Ideal $(f(x)) \subset K[x]$ ist maximal, falls $f(x)$ irreduzibel ist.

   (e) Der Kern der Abbildung $\Phi_f : K[t] \to \mathrm{End}(V)$, $g(t) \mapsto g(f)$, ist ein Ideal, also ein Hauptideal in $K[t]$. Das Minimalpolynom $M_f(t)$ ist das eindeutige unitäre Erzeugende dieses Ideals.

   (f) Eine Semilinearform auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{C}$, die additiv ist $(f(a + b) = f(a) + f(b))$ und semilinear bezüglich der skalaren Multiplikation ist $(f(\lambda \cdot v) = \overline{\lambda} \cdot f(v))$.

2. *(4+2=6 Punkte)*

   (a) Man benutzt immer wieder $\alpha^3 = \alpha + 1$ (und natürlich $1 + 1 = 0$).

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \alpha + 1, \\ \alpha^4 &= \alpha^2 + \alpha, \\ \alpha^5 &= \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 1, \\ \alpha^6 &= \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^2 + 1, \\ \alpha^7 &= \alpha^3 + \alpha = 1. \end{aligned}$$

   (b) Die Nullstellen von $t^3 + t + 1$ sind α, α^2 und $\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha$. Bei α ist das klar wegen $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$. Bei α^2 folgt es aus

$$(\alpha^2)^3 + \alpha^2 + 1 = \alpha^6 + \alpha^2 + 1 \overset{(a)}{=} (\alpha^2 + 1) + \alpha^2 + 1 = 0.$$

   Bei α^4 folgt es aus

$$(\alpha^4)^3 + \alpha^4 + 1 \overset{(a)}{=} \alpha^5 + (\alpha^2 + \alpha) + 1 \overset{(a)}{=} (\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha) + 1 = 0.$$

3. *(5 Punkte)* Lösungen zu $b \equiv 2 \bmod 3$ sind $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ...$ Ihre Reste modulo 5 sind $2, 0, 3, 1, 4, 2, 0, 3, ...$ Also ist $b_0 := 8$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 2 \bmod 3 \\ b &\equiv 3 \bmod 5 \end{aligned}$$

Es ist $b_0 \equiv 1 \bmod 7$ und $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \bmod 7$. Also ist

$$\begin{aligned} b &= 8 + 4 \cdot 15 = 68 \\ \text{mit } b &\equiv 1 + 4 \cdot 1 = 5 \bmod 7 \end{aligned}$$

eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 2 \bmod 3 \\ b &\equiv 3 \bmod 5 \\ b &\equiv 5 \bmod 7 \end{aligned}$$

4. *(6 Punkte)*

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det(t \cdot E_3 - A) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 1 & -1 & t-1 \end{pmatrix} \\ &= t^2(t-1) + 1 - t = (t-1)(t^2-1) = (t-1)^2(t+1), \end{aligned}$$

also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A,-1) &= \{a \in M(3 \times 1, \mathbb{Q}) \,|\, (-E_3 - A) \cdot a = 0\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, x,y,z \in \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A,1) &= \{a \in M(3 \times 1, \mathbb{Q}) \,|\, (E_3 - A)a = 0\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, x,y,z \in \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathrm{Hau}(A,1) = \{a \in M(3 \times 1, \mathbb{Q}) \,|\, (E_3 - A)^2 \cdot a = 0\}$$
$$= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, x,y,z \in \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Matrix A ist die Transponierte der Begleitmatrix von $P_A(t)$. Daher ergeben sich die Erzeugenden von $\mathrm{Eig}(A,\lambda_2)$, $\mathrm{Eig}(A,\lambda_1)$ und $\mathrm{Hau}(A,\lambda_1)$ auch aus Aufgabe 3 (a)+(b) von Blatt 5.

5. *(5 Punkte)*

$$
\begin{aligned}
& \{\text{isotrope Vektoren von } \mathrm{Bil}_A\} = \{a \in M(2\times 1, \mathbb{Q}) - \{0\} \mid 0 = a^{tr} \cdot A \cdot a\} \\
= \; & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M(2\times 1, \mathbb{Q}) - \{0\} \mid 0 = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2\} \\
= \; & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M(2\times 1, \mathbb{Q}) - \{0\} \mid x = y\} = \mathbb{Q}^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Rad}(\mathrm{Bil}_A) = \{a \in M(2\times 1, \mathbb{Q}) \mid 0 = A \cdot a\} \\
= \; & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ 0 = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x = y\} \\
= \; & \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

6. *(5 Punkte)* Es muss $P_f(f) = 0$ gezeigt werden. Auf jedem Hauptraum $\mathrm{Hau}(f, \lambda_k)$ ist $P_f(f)$ die Nullabbildung wegen

$$
\begin{aligned}
P_f(f)(\mathrm{Hau}(f, \lambda_k)) &= \left(\prod_{j \neq k} (f - \lambda_j \cdot \mathrm{id}\,)^{d_j} \right) \circ (f - \lambda_k \cdot \mathrm{id}\,)^{d_k} (\mathrm{Hau}(f, \lambda_k)) \\
&= \left(\prod_{j \neq k} (f - \lambda_j \cdot \mathrm{id}\,)^{d_j} \right) (0) = 0.
\end{aligned}
$$

Daher ist $P_f(f)$ auf ganz V die Nullabbildung.

7. *(1+3+1+2+3=10 Punkte)*

   (a) Es ist $x^p - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_p$, also $\Phi_p = (x^p - 1)/(x - 1) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$.

   (b) Es ist $x^{pq} - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_p \cdot \Phi_q \cdot \Phi_{pq}$, also

$$
\begin{aligned}
\Phi_{pq} &= \frac{x^{pq} - 1}{\Phi_p \cdot \Phi_q \cdot (x-1)} = \frac{(x^{pq} - 1(x-1)}{(x^p - 1)(x^q - 1)} = \frac{x^{pq} - 1}{x^p - 1} \cdot (1 - x) \cdot \frac{1}{1 - x^q} \\
&= \left(\sum_{a=0}^{q-1} x^{ap} \right) \cdot (1 - x) \cdot \left(\sum_{b=0}^{\infty} x^{bq} \right).
\end{aligned}
$$

   (c) Das folgt aus (b) und aus

$$
\left(\sum_{a=0}^{q-1} x^{ap} \right) \cdot \left(\sum_{b=0}^{\infty} x^{bq} \right) = \sum_{(a,b) \in (\mathbb{Z} \cap [0, q-1]) \times \mathbb{N}_0} x^{ap+bq}.
$$

(d) Seien (a_1, b_1) und (a_2, b_2) im Definitionsbereich von g mit $g(a_1, b_1) = g(a_2, b_2)$. Dann ist $(a_1 - a_2)p = (b_2 - b_1)q$. Weil p und q verschiedene Primzahlen sind, folgt $p|(b_2 - b_1)$. Wegen $b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \cap [0, p-1]$ folgt $b_1 = b_2$, und damit auch $a_1 = a_2$. Daher ist g injektiv.

(e) Wir starten mit der Formel in (c). Wegen $\deg \Phi_{pq} = \varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ sind nur Potenzen x^{ap+bq} mit $ap + bq \leq (p-1)(q-1)$ interessant. Die treten nur bei (a, b) im Definitionsbereich $\mathrm{Def}(g)$ von g auf. Mit (c) folgt

$$\Phi_{pq}(x) = \sum_{(a,b)\in \mathrm{Def}(g):ap+bq\leq(p-1)(q-1)} x^{ap+bq} - \sum_{(a,b)\in \mathrm{Def}(g):ap+bq\leq(p-1)(q-1)-1} x^{ap+bq+1}.$$

Weil g injektiv ist, folgt die Formel in (e).