Aufgabe 1 (2+1+1+1+1+1+2=9 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Sei R ein Integritätsring (ein kommutativer Ring mit Eins ohne Nullteiler). Wann ist ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ *irreduzibel*? Wann ist ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ ein *Primelement*?

(b) Geben Sie einen ZPE-Ring an, der kein Hauptidealring ist.

(c) Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. Wann ist U ein *Normalteiler von* G?

(d) Wann ist der Quotient R/I eines kommutativen Rings R mit Eins nach einem Ideal ein Körper?

(e) Welche Eigenschaft muss das charakteristische Polynom $P_f(t)$ eines Endomorphismus $f : V \to V$ eines n-dimensionalen Vektorraums V erfüllen, damit der Endomorphismus sich in Jordannormalform bringen läßt?

(f) Was sagt der Satz von Cayley und Hamilton?

(g) Was ist eine *Sesquilinearform*? (Die Begriffe *linear* und *semilinear* können Sie als bekannt voraussetzen.) Wann ist eine Sesquilinearform hermitesch?

.

Aufgabe 2 (5+1=6 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Führen Sie mit den Zahlen $r_0 = 120$ und $r_1 = 34$ den erweiterten Euklidischen Algorithmus durch, und geben Sie in einer Tabelle die Zahlen r_i, q_i, x_i, y_i mit

$$\begin{aligned} r_{i-2} &= q_{i-1}r_{i-1} + r_i, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_i &= x_{i-2} - q_{i-1}x_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_i &= y_{i-2} - q_{i-1}y_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ (\text{und deshalb auch } r_i &= x_i r_0 + y_i r_1) \end{aligned}$$

bis $i = n$ mit $r_{n+1} = 0$ (und $r_n = \mathrm{ggT}(r_0, r_1)$) an. Geben Sie auch n an.

(b) Wie lautet die Ungleichung, die beim Euklidischen Algorithmus für $\mathbb{Z}$ im Fall $r_0 \in \mathbb{Z}$ und $r_1 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Anzahl n der Iterationsschritte mit der Anzahl der Dezimalstellen von r_1 verbindet?

Aufgabe 3 (2+2+2=6 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Vervollständigen Sie die folgenden Formeln, indem Sie die Fragezeichen geeignet ersetzen. Hier ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche phi-Funktion.

$$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= ? \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}, p \text{ eine Primzahl.} \\ \varphi(a \cdot b) &= ? \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathrm{ggT}(a, b) = 1. \end{aligned}$$

(b) Machen Sie eine Tabelle, die in der 1. Zeile die Zahlen $n \in \{25, 26, 27, 28\}$ und in der 2. Zeile die Zahlen $\varphi(n)$ enthält. $\varphi(n)$ soll unter n stehen.

(c) Die Einheitengruppe des Ring $(\mathbb{Z}_{22}, +_{22}, \cdot_{22})$ ist $\mathbb{Z}_{22}^*$ mit $|\mathbb{Z}_{22}^*| = \varphi(22) = 10$. Machen Sie eine Tabelle, die in der 1. Zeile alle Elemente von $\mathbb{Z}_{22}^*$ und in der 2. Zeile ihre Inversen enthält. Das Inverse zu einem Element soll unter dem Element stehen.

Aufgabe 4 (4+1=5 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Das m-te Kreisteilungspolynom $\Phi_m(x)$ ist definiert durch

$$\Phi_m = \Phi_m(x) := \prod_{a \in \mathbb{Z}_m^*} (x - e^{2\pi i a/m}) \in \mathbb{C}[x].$$

Φ_m ist offenbar unitär und erfüllt $\deg \Phi_m = \varphi(m)$. Tatsächlich ist $\Phi_m \in \mathbb{Z}[x]$, und es ist in $\mathbb{Z}[x]$ und in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Und die Kreisteilungspolynome lassen sich rekursiv mit folgender Formel berechnen:

$$x^m - 1 = \prod_{d \in \mathbb{N}:\ d|m} \Phi_d.$$

Es seien $p_1, ..., p_k$ lauter verschiedene Primzahlen, und es seien $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie

$$\Phi_{p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_k^{n_k}}(x) = \Phi_{p_1 \cdot ... \cdot p_k}(x^{p_1^{n_1-1} \cdot ... \cdot p_k^{n_k-1}}).$$

(b) Geben Sie (ohne Begründungen) $\Phi_{18}(x)$ und $\Phi_{24}(x)$ an.

Aufgabe 5 (1+3+1=5 Punkte) erhaltene Punkte:

(a) Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = \prod_{j=1}^{n}(t - \lambda_j)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Geben Sie (ohne Begründung) die Formeln an, die die Spur $\mathrm{Spur}(A)$ und die Determinante $\det(A)$ mit den Werten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ verbinden.

(b) Eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ habe die Spur 0 und die Determinante 20 und Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie λ_1, λ_2 und λ_3.

(c) Es sei ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Vektorraums V gegeben, der sich in Jordannormalform bringen läßt, mit acht Jordanblöcken. Die folgende Tabelle zeigt die Eigenwerte λ_i und die Größen r_i der Jordanblöcke. Hier sind $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

λ_i	α	α	α	β	β	γ	γ	γ
r_i	1	4	3	2	2	3	1	3

Geben Sie (ohne Begründung) das charakteristische Polynom $P_f(t)$ und das Minimalpolynom $M_f(t)$ an.

Aufgabe 6 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[t]_{\leq 3} := \{f \in \mathbb{R}[t] \mid \deg f \leq 3\}$ hat die Basis $\mathcal{B} := (1, t, t^2, t^3)$. Die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \times \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}, \quad \phi(f, g) = \int_0^1 f'g'\mathrm{d}t,$$

(mit $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$) ist eine Bilinearform. Berechnen Sie $\phi(\mathcal{B}^{tr}, \mathcal{B})$.

Aufgabe 7 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Der Hauptraum $\mathrm{Hau}(f, \lambda)$ von f zum Eigenwert λ ist

$$\mathrm{Hau}(f, \lambda) := \{v \in V \mid \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } (f - \lambda \cdot \mathrm{id})^m(v) = 0\}.$$

Sei $d(\lambda) := \dim \mathrm{Hau}(f, \lambda)$. Zeigen Sie

$$\mathrm{Hau}(f, \lambda) = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \quad \text{für jedes } m \geq d(\lambda).$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) erhaltene Punkte:

Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ mit der Gradfunktion $w : \mathbb{Z}[i] - \{0\} \to \mathbb{N}$, $a \mapsto |a|^2$, ein Euklidischer Ring ist.

.