Lösungen der Klausur am 05.06.2020 zur Linearen Algebra IIa

1. *(2+1+1+1+1+1+2=9 Punkte)*

   (a) Ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ ist irreduzibel, falls gilt:

   $$a = b \cdot c \Rightarrow b \in R^* \text{ oder } c \in R^*.$$

   Ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ ist ein Primelement, falls gilt:

   $$a|(b \cdot c) \Rightarrow a|b \text{ oder } a|c.$$

   (b) $\mathbb{Z}[x]$ oder $K[x, y]$.

   (c) U ist genau dann ein Normalteiler von G, wenn $U = aUa^{-1}$ für alle $a \in G$ ist.

   (d) Der Quotient R/I ist ein Körper, wenn I ein maximales Ideal ist.

   (e) Das charakteristische Polynom muss in Linearfaktoren zerfallen, also $P_f(t) = \prod_{j=1}^{n}(t - \lambda_j)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.

   (f) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V mit $\dim V \in \mathbb{N}$. Dann ist $P_f(f) = 0 \in \text{End}(V)$.

   (g) Eine Sesquilinearform ist eine Abbildung $\phi : V \times V \to \mathbb{C}$, wobei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, die im linken Argument linear und im rechten Argument semilinear ist. Sie ist hermitesch, falls $\phi(b, a) = \overline{\phi(a, b)}$ für alle $a, b \in V$ ist.

2. *(5+1=6 Punkte)*

   (a)

$120 = 3 \cdot 34 + 18$	$q_1 = 3$	$r_2 = 18$
$34 = 1 \cdot 18 + 16$	$q_2 = 1$	$r_3 = 16$
$18 = 1 \cdot 16 + 2$	$q_3 = 1$	$r_4 = 2$
$16 = 8 \cdot 2 + 0$	$q_4 = 8$	$r_5 = 0$

i	r_i	q_i	x_i	y_i
0	120	$-$	1	0
1	34	3	0	1
2	18	1	1	-3
3	16	1	-1	4
4	2	8	2	-7
5	0	$-$	$-\frac{r_1}{r_4} = -17$	$\frac{r_0}{r_4} = 60$

   also $n = 4$, $\quad ggT(r_0, r_1) = r_4 = 2$

   (x_5 und y_5 waren nicht verlangt.)

(b) $n \leq 5 \cdot |\text{Dezimalstellen von } r_1|$.

3. *(2+2+2=6 Punkte)*

(a)

$$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= (p-1)p^{k-1} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N},\ p \text{ eine Primzahl.} \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathrm{ggT}(a,b) = 1. \end{aligned}$$

(b)

n	25	26	27	28
$\varphi(n)$	20	12	18	12

(c)

n	1	3	5	7	9	13	15	17	19	21
n^{-1}	1	15	9	19	5	17	3	13	7	21

4. *(4+1=5 Punkte)*

(a) Die Polynome links und rechts haben den gleichen Grad:

$$\begin{aligned} \deg \Phi_{p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}}(x) &= \varphi(\prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}) = \prod_{j=1}^{k} (p_j - 1) p_j^{n_j - 1} = \prod_{j=1}^{k} \varphi(p_j) p_j^{n_j - 1} \\ &= \varphi(p_1 \cdot \ldots \cdot p_k) \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j - 1} = \deg \Phi_{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}(x^{p_1^{n_1-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k-1}}). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Polynoms links sind per Definition die Einheitswurzeln λ mit der Ordnung $o(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}$. Sie sind auch Nullstellen des Polynoms rechts, denn für solches λ ist $o(\lambda^{p_1^{n_1-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k-1}}) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Da das Polynom links nur einfache Nullstellen hat, und da die beiden Polynome den gleichen Grad haben, haben sie die gleichen Nullstellen. Da beide Polynome unitär sind, sind sie gleich.

(b) $\Phi_{18}(x) = x^6 - x^3 + 1$, $\quad \Phi_{24}(x) = x^8 - x^4 + 1 \quad$ (wegen (a) und $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$).

5. *(1+3+1=5 Punkte)*

(a) $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$, $\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.

(b) Wegen (a) ist $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 20$. Wenn man λ_1, λ_2 und λ_3 so (um)benennt, dass $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ ist, erlaubt die Bedingung $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 20$ nur die Tripel $(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \in \{(1,1,20), (1,2,10), (1,4,5), (2,2,5)\}$. Die Bedingung $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ erlaubt dann nur noch $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -4, 5)$.

(c)

$$
\begin{aligned}
P_f(t) &= (t-\alpha)^8 \cdot (t-\beta)^4 \cdot (t-\gamma)^7, \\
M_f(t) &= (t-\alpha)^4 \cdot (t-\beta)^2 \cdot (t-\gamma)^3.
\end{aligned}
$$

6. *(5 Punkte)* Bei $a, b \in \{0,1,2,3\}$ ist

$$
\phi(t^a, t^b) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0 \text{ oder } b = 0, \\ ab \int_0^1 t^{a+b-2} \mathrm{d}t = \frac{ab}{a+b-1} & \text{für } a, b \in \{1,2,3\}. \end{cases}
$$

Daher ist

$$
\phi(\mathcal{B}^{tr}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}.
$$

7. *(5 Punkte)* Das Problem ist zu sehen, daß die $d(\lambda)$-te Potenz reicht. Sei $H_j := \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}\,)^j \subset V$. Es ist $\{0\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset ....$ Wegen $\dim \mathrm{Hau}(f, \lambda) = d(\lambda)$ gibt es ein $l \leq d(\lambda)$ mit $H_l = H_{l+1}$.

Behauptung: $H_l = H_{l+1} = H_{l+2} = ...$

Annahme: $v \in H_{l+2} - H_{l+1}$.

Dann ist $(f - \lambda \cdot \mathrm{id}\,)(v) \in H_{l+1} - H_l$. Widerspruch.

Also ist $H_{l+1} = H_{l+2}$. Die Behauptung folgt induktiv. Also ist

$$
\mathrm{Hau}(f, \lambda) \overset{\mathrm{Def}}{=} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} H_j = H_l = H_{d(\lambda)} = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}\,)^{d(\lambda)}.
$$

8. *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ mit der Gradfunktion $w : \mathbb{Z}[i] - \{0\} \to \mathbb{N}$, $a \mapsto |a|^2$, ein Euklidischer Ring ist.

Lösung: Weil $\mathbb{Z}[i]$ ein Unterring des Körpers $\mathbb{C}$ ist, ist $\mathbb{Z}[i]$ ein Integritätsring.

Die Gradfunktion wird zu einer Abbildung $w : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \mapsto |a|^2$, erweitert. Dann ist $w(a) = 0 \iff a = 0$.

Seien $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ mit $b \neq 0$. Es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{Z}[i]$, so dass der Abstand $|\frac{a}{b} - q|$ minimal ist. Es ist $|\frac{a}{b} - q| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Zahl $r := a - qb = b \cdot (\frac{a}{b} - q)$ erfüllt

$$
w(r) = |r|^2 = |b|^2 \cdot |\frac{a}{b} - q|^2 = w(b) \cdot |\frac{a}{b} - q|^2 \leq w(b) \cdot \frac{1}{2} < w(b)
$$

und $a = qb + r$. Es folgt $r = 0$ oder $w(r) < w(b)$ (die Ungleichung gilt hier sogar auch bei $r = 0$). Daher ist Division mit Rest möglich. $\mathbb{Z}[i]$ ist mit der Gradfunktion w ein Euklidischer Ring.