Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI — Blatt 6
Prof. Dr. Claus Hertling, Khadija Larabi — 16.03.2020

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

Einige **Definitionen**, die in den Aufgaben 3 und 4 gebraucht werden:
Sei $\phi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf einem K-Vektorraum V.
Zwei Vektoren v_1 und $v_2 \in V$ sind *orthogonal* (Notation: $v_1 \perp v_2$), falls $\phi(v_1, v_2) = 0$ ist (das ist wegen der Symmetrie von ϕ von der Reihenfolge von v_1 und v_2 unabhängig).
Ein Vektor $v \in V - \{0\}$ ist *isotrop*, falls er zu sich selbst orthogonal ist: $\phi(v, v) = 0$.
Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist das *orthogonale Komplement* $U^\perp \subset V$ von U der Untervektorraum

$$U^\perp := \{v \in V \mid \phi(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Das Radikal von ϕ ist der Untervektorraum $\mathrm{Rad}(\phi) \subset V$ mit

$$\mathrm{Rad}(\phi) := V^\perp = \{v \in V \mid \phi(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in V\}.$$

Die symmetrische Bilinearform heißt *nichtentartet*, falls $\mathrm{Rad}(\phi) = \{0\}$ ist.

1. *(4 Punkte)* Zuerst ein Beispiel: Im folgenden Bild steht jeder Punkt $\bullet$ für ein Element einer Basis $\mathcal{B}$ eines K-Vektorraums V, und $f : V \to V$ bildet die Elemente der Basis so aufeinander ab, wie es das Bild anzeigt. Offenbar gilt: $\dim V = 9$, f ist nilpotent, und bei geeigneter Reihenfolge der Elemente der Basis $\mathcal{B}$ ist die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ in Jordannormalform mit 4 Blöcken der Größen 4, 2, 2 und 1.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & 0 \\
 & & & & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & 0 \\
 & & & & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & 0 \\
 & & & & & & \bullet & \xrightarrow{f} & 0
\end{array}$$

Weiter sieht man

i	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\dim\ker f^i$	9	9	9	9	9	9	8	7	4	0

Nun sei $g : W \to W$ ein nilpotenter Endomorphismus eines K-Vektorraums W mit $\dim W = 12$ und mit folgenden Dimensionen der Kerne $\ker g^j$:

i	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\dim\ker g^j$	12	12	12	12	12	12	12	12	11	10	8	5	0

Wieviele und wie große Jordanblöcke hat eine Jordannormalform von g? Machen Sie ein analoges Bild zu oben, das die Operation von g auf einer Basis von W zeigt, die eine Jordannormalform gibt. Geben Sie auch das charakteristische Polynom $P_g(t)$ und das Minimalpolynom $M_g(t)$ an.

2. *(1+1 Punkte)*

   (a) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismen eines K-Vektorraums V mit $\dim_K V = 17$, der sich in Jordannormalform bringen läßt. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. f habe 8 Jordanblöcke der Größen r_i und mit Eigenwerten λ_i wie in der Tabelle.

λ_i	α	α	α	β	β	γ	γ	γ
r_i	1	4	3	2	1	1	2	3

   Geben Sie $P_f(t)$ und $M_f(t)$ an. Begründungen sind nicht nötig.

   (b) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$ in Jordannormalform an, deren Jordanblöcke nicht bis auf die Reihenfolge übereinstimmen, die aber trotzdem $P_A(t) = P_B(t)$ und $M_A(t) = M_B(t)$ erfüllen.

3. *(4 Punkte)*

   (a) Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[t]_{\leq 3} = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot t \oplus \mathbb{R} \cdot t^2 \oplus \mathbb{R} \cdot t^3$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 ist die folgende Bilinearform $\phi_{int,2}$ definiert,

$$\phi_{int,2}(f, g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

   Bestimmen Sie die Matrix $(\phi(b_i, b_j))$ zur Basis $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, t, t^2, t^3)$.
   Bemerkung: $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ ist ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\phi_{int,2}$.

   (b) $U := \mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ sei der eindimensionale Unterraum von $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, der vom Polynom 1 erzeugt wird. Bestimmen Sie sein orthogonales Komplement $U^\perp$ bezüglich $\phi_{int,2}$.

4. *(4 Punkte)* Die vier symmetrischen Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   definieren symmetrische Bilinearformen ϕ_i auf $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ durch

$$\phi_i(x, y) := x^{tr} \cdot A_i \cdot y.$$

   Identifizieren Sie den $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ mit der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ und machen Sie für $i = 1, 2, 3, 4$ je eine Skizze, die für alle Punkte x in einer Umgebung von 0 (zum Beispiel die Punkte in einer Kreisscheibe mit Zentrum 0) kenntlich macht, ob $\phi_i(x, x)$ größer, gleich oder kleiner Null ist. Bestimmen Sie außerdem jeweils alle isotropen Vektoren und das Radikal.

5. *(2 Punkte)* Eine *Isometrie* eines Euklidischen Vektorraums V mit Skalarprodukt ϕ ist ein Automorphismus $f : V \to V$ mit $\phi(f(v_1), f(v_2)) = \phi(v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

   Zeigen Sie: Die Linksmultiplikation l_A mit einer Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist genau dann eine Isometrie von $M(n \times 1, \mathbb{R})$ mit dem Standard-Skalarprodukt, wenn A eine orthogonale Matrix ist. (Hinweis: Aufgabe 4 (a) von Blatt 5).

Abgabe bis Montag, den 23. März 2020, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5