FSS 15 LA IIa Lösungen zu Blatt 6

1

$$\bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{g} 0$$
$$\bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{g} 0$$
$$\bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{g} 0$$
$$\bullet \xrightarrow{g} 0$$
$$\bullet \xrightarrow{g} 0$$

5 Jordanblöcke, ihre Größen: 5, 3, 2, 1, 1.

$P_g(t) = t^{12}$, $M_g(t) = t^5$.

2 (a) $P_g(t) = (t-\alpha)^8 \cdot (t-\beta)^3 \cdot (t-\gamma)^6$,

$M_g(t) = (t-\alpha)^4 \cdot (t-\beta)^2 \cdot (t-\gamma)^3$.

(b) $A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[$P_A(t) = P_B(t) = t^4$, $M_A(t) = M_B(t) = t^2$.]

$\boxed{3}$ (a) $\phi(b_i', b_j') = \int_{-1}^{1} t^{i-1} \cdot t^{j-1} \, dt = \int_{-1}^{1} t^{i+j-2} \, dt = \left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_{-1}^{1}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } i+j \equiv 1 \bmod 2 \\ \frac{2}{i+j-1} & \text{falls } i+j \equiv 0 \bmod 2 \end{cases}$$

$$(\phi(b_i', b_j'))_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

(b) $\Psi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}, \ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t + x_3 \cdot t^2 + x_4 \cdot t^3$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus. Und

$$\phi(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t + x_3 t^2 + x_4 t^3, \ y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot t + y_3 \cdot t^2 + y_4 \cdot t^3)$$
$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (\phi(b_i', b_j')) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Also gilt: $y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot t + y_3 \cdot t^2 + y_4 \cdot t^3 \in (\mathbb{R} \cdot 1)^\perp$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (1\ 0\ 0\ 0)\,(\phi(b_i', b_j')) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\tfrac{2}{1}\ \ 0\ \ \tfrac{2}{3}\ \ 0\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 2y_1 + \tfrac{2}{3} y_3$$

$$(\mathbb{R} \cdot 1)^\perp = \{ y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot t + y_3 \cdot t^2 + y_4 \cdot t^3 \mid 3y_1 + y_3 = 0 \}$$

$\boxed{4}$ Notation:

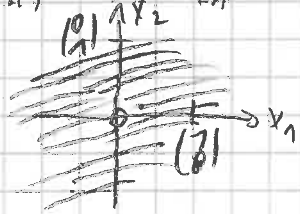
Gebiet, wo $\phi_i(x,x) > 0$ ist

Gebiet, wo $\phi_i(x,x) < 0$ ist

Punktmenge, wo $\phi_i(x,x) = 0$ ist

[FSS15 LA IIa Lösungen zu Blatt 6]

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: ϕ_1 ist das Standardskalarprodukt auf $M(2\times 1, \mathbb{R})$.



$\phi_1(x,x) > 0 \quad \forall x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$

$\{\text{isotrope Vektoren}\} = \emptyset$

$\mathrm{Rad}(\phi_1) = \{0\}$

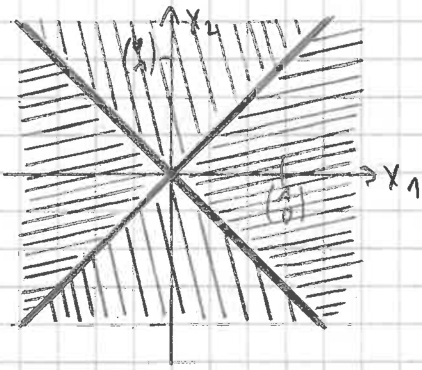
$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: $\phi_2(x,x) = \phi_2\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{x_1}{x_2}\right) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = x_1^2 - x_2^2$.

$\{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \phi_2(x,x) = 0\} = \{x \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$

$= \{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid x_1 = x_2\} \cup \{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid x_1 = -x_2\}$

$\{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \phi_2(x,x) > 0\} = \{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid x_1^2 > x_2^2\}$

$\{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \phi_2(x,x) < 0\} = \{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid x_1^2 < x_2^2\}$



$\mathrm{Rad}(\phi_2) = \left\{\binom{y_1}{y_2} \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\binom{y_1}{y_2} = 0\right\}$

$= \{0\}$

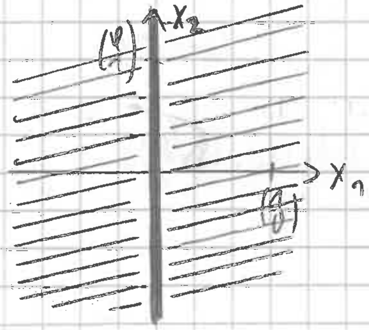
$\{\text{isotrope Vektoren}\} = \{x \mid \phi_2(x,x) = 0\} \setminus \{0\}$

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\phi_3(x,x) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = x_1^2$

$\{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \phi_3(x,x) = 0\} = \{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid x_1 = 0\}$

$\{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \phi_3(x,x) > 0\} = \{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid x_1 \neq 0\}$

$\{x \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \phi_3(x,x) < 0\} = \emptyset$.



$\{\text{isotrope Vektoren}\} = \{x \mid \phi_3(x,x) = 0\} \setminus \{0\}$

$\mathrm{Rad}(\phi_3) = \left\{\binom{y_1}{y_2} \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\binom{y_1}{y_2} = 0\right\}$

$= \left\{\binom{y_1}{y_2} \mid y_1 = 0\right\}$

$= \{\text{isotrope Vektoren}\} \cup \{0\}$.

4)

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}: \quad \Phi_4(x,x) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1+x_2)^2$$

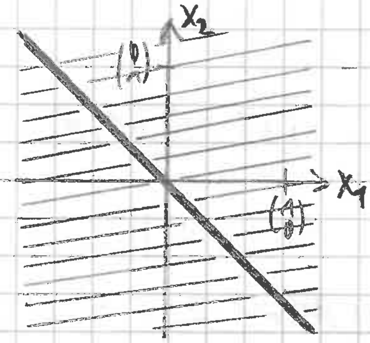
$$\{x \in M(2\times 1,\mathbb{R}) \mid \Phi_4(x,x) = 0\} = \{x \mid x_1+x_2 = 0\}$$

$$\{x \in M(2\times 1,\mathbb{R}) \mid \Phi_4(x,x) > 0\} = \{x \mid x_1+x_2 \neq 0\}$$

$$\{x \in M(2\times 1,\mathbb{R}) \mid \Phi_4(x,x) < 0\} = \emptyset$$

$$\{\text{isotrope Vektoren}\} = \{x \mid x_1+x_2 = 0\} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(\Phi_4) &= \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in M(2\times 1,\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in M(2\times 1,\mathbb{R}) \;\middle|\; y_1+y_2 = 0\right\} \\ &= \{\text{isotrope Vektoren}\} \cup \{0\}.\end{aligned}$$



$\boxed{5}$ Sei $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ die Standardbasis des $M(n\times 1,\mathbb{R})$. $\mathcal{E}$ ist eine ON-Basis.

$\Rightarrow$: Sei l_A eine Isometrie $\rightsquigarrow$ $l_A(\mathcal{E})$ ist eine ON-Basis.

$\rightsquigarrow$ Die Spalten von A sind eine ON-Basis

$\rightsquigarrow$ (mit Aufgabe 4(a) von Blatt 5) A ist eine orthogonale Matrix.

$\Leftarrow$: Sei A eine orthogonale Matrix $\rightsquigarrow$ (*) die Spalten von A sind eine ON-Basis $\rightsquigarrow$ $l_A(\mathcal{E})$ ist eine ON-Basis.

Seien $a, b \in M(n\times 1,\mathbb{R})$, $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $b = \sum_{j=1}^n b_j e_j$

$l_A(a) = \sum_{i=1}^n a_i\, l_A(e_i)$, $l_A(b) = \sum_{i=1}^n b_i\, l_A(e_i)$.

$$\Phi(l_A(a), l_A(b)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \cdot \Phi(l_A(e_i), l_A(e_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \cdot \delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i = \Phi(a,b). \qquad \square$$