Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

1. *(1+2 Punkte)*

   (a) Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Geben Sie (ohne Begründung) die Formeln an, die die Spur $\mathrm{Spur}(A)$ und die Determinante $\det(A)$ mit den Werten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ verbinden.

   (b) Eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ habe $\mathrm{Spur}(A) = 1$, Determinante $\det(A) = 8$ und drei Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Allein aus diesen Informationen kann man λ_1, λ_2 und λ_3 bestimmen. Wie? Was sind ihre Werte?

2. *(1+3 Punkte)*

   (a) Sei K ein Körper. $K[t]_{\leq 7}$ ist der 8-dimensionale K-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 7. Es sei

   $$f : K[t]_{\leq 7} \to K[t]_{\leq 7}, \quad g(t) \mapsto g'(t),$$

   die Ableitung. f ist ein nilpotenter Endomorphismus. Bestimmen Sie für die drei Fälle $\mathrm{char}(K) \in \{0, 2, 3\}$ jeweils die Bilder unter f der Vektoren t^k für alle $k \in \{0, \ldots, 7\}$.

   (b) Bestimmen Sie in den drei Fällen $\mathrm{char}(K) \in \{0, 2, 3\}$ eine Jordannormalform von f. Geben Sie jeweils eine Basis $\mathcal{B}$ an, so daß $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ in Jordannormalform ist.

   Hinweise: Die Basis aus Monomen $1, t, t^2, ..., t^7$ ist in allen drei Fällen schon ziemlich nah dran. Aber die Jordanblöcke sind in den drei Fällen ganz verschieden.

3. *(1+2+2 Punkte)* Sei $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 \in K[t]$ ein unitäres Polynom. Die *Begleitmatrix* ist die transponierte Matrix zur Matrix

   $$A^{(f)} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$

   (wo nichts steht, stehen Nullen). Die Begleitmatrix und die Matrix $A^{(f)}$ haben das charakteristische Polynom $P_{A^{(f)}}(t) = f(t)$ (Aufgabe 2/Blatt 10 im HWS 19).

(a) Sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass
$$v_0 := (1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^{n-1})^t \in M(n \times 1, K)$$
ein Eigenvektor der Matrix $A^{(f)}$ mit Eigenwert λ ist.

(b) Sei $\lambda \in K$ eine doppelte Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass
$$v_1 := (0, 1, 2\lambda, ..., (n-1)\lambda^{n-2})^t \in M(n \times 1, K)$$
die Gleichung
$$A^{(f)} \cdot v_1 = \lambda \cdot v_1 + v_0$$
erfüllt.

(c) Sei λ eine Nullstelle von f mit Vielfachheit $m \in \{3, ..., n\}$. Finden Sie Vektoren $v_2, v_3, ..., v_{m-1} \in M(n \times 1, K)$, die zusammen mit v_1 und v_0 und $v_{-1} := 0$ die Gleichungen
$$A^{(f)} \cdot v_k = \lambda \cdot v_k + k \cdot v_{k-1} \quad \text{für } k \in \{0, 1, ..., m-1\}$$
erfüllen.

Hinweise: Es ist nützlich, für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das Polynom
$$(x)_k := x \cdot (x-1) \cdot ... \cdot (x-k+1) \in \mathbb{Z}[x]$$
zu definieren und für $k \in \mathbb{N}$ die Identität
$$(x)_k = (x-1)_k + k(x-1)_{k-1}$$
zu beobachten. Die k-te Ableitung von f ist
$$f^{(k)} = (n)_k \cdot t^{n-k} + (n-1)_k \cdot t^{n-1-k} + ... + (k+1)_k \cdot t + (k)_k.$$

4. *(4 Punkte)* Definition: Eine Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls sie $A^{-1} = A^{tr}$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass eine Matrix A genau dann orthogonal ist, wenn ihre Spalten eine ON-Basis des $M(n \times 1, \mathbb{R})$ mit dem Standard-Skalarprodukt bilden.

(b) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ orthogonal.

(i) Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A als Matrix in $M(n \times n, \mathbb{C})$ Betrag 1 hat, also $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ist (äquivalent: $\lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$).

(ii) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

(iii) Es seien $v_i \in M(n \times 1, \mathbb{C}) - \{0\}$ für $i \in \{1, 2\}$ Eigenvektoren von A mit Eigenwerten λ_i mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie $\overline{v_2}^{tr} \cdot v_1 = 0$.

Hinweise: Diese Eigenschaften sind ähnlich zu den Eigenschaften symmetrischer reeller Matrizen, die im HWS 2019 im Satz 9.25 behandelt wurden (mit Beweis an der Tafel). Der Satz und sein Beweis werden am Anfang von Kapitel 13 wiederholt. Sie sind eingeladen, sich den Beweis dort anzusehen und dann hier ähnliche Rechnungen zu machen.

Wenn $v \in M(n \times 1, \mathbb{C}) - \{0\}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist, ist es auch ein Eigenvektor von A^{-1}, und $\overline{v}$ ist ein Eigenvektor von A und A^{-1} (hier ist $\overline{A} = A$ wichtig). Was ist jeweils der Eigenwert?

Abgabe bis Montag, den 16. März 2020, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5