FSS 2020 LA IIa Lösungen zu Blatt 5

$\boxed{1}$ (a) $\operatorname{Spur}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

(b) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 8$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. $\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2, -1, 4)$.

$\boxed{2}$ (a) $\mathcal{A} := (1, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7)$.

char $K = 0$: $f(\mathcal{A}) = (0, 1, 2t, 3t^2, 4t^3, 5t^4, 6t^5, 7t^6)$.

char $K = 2$: $f(\mathcal{A}) = (0, 1, 0, t^2, 0, t^4, 0, t^6)$.

char $K = 3$: $f(\mathcal{A}) = (0, 1, 2t, 0, t^3, 2t^4, 0, t^6)$.

(b) char $K = 0$: $\mathcal{B} := \left(1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, \frac{t^4}{4!}, \frac{t^5}{5!}, \frac{t^6}{6!}, \frac{t^7}{7!}\right)$

$$f(\mathcal{B}) = \left(0, 1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, \frac{t^4}{4!}, \frac{t^5}{5!}, \frac{t^6}{6!}\right)$$

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$ ein 8×8 Jordanblock

char $K = 2$: $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, $f(\mathcal{B}) = (0, 1, 0, t^2, 0, t^4, 0, t^6)$

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & 0 & & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & 0 & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & 0 & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \end{pmatrix}$$ vier 2×2 Jordanblöcke

2)

char $K = 3$: $\quad \mathcal{B} := (1, t, 2t^2, t^3, t^4, 2t^5, t^6, t^7)$

$$f(\mathcal{B}) = (0, 1, t, 0, t^3, t^4, 0, t^6)$$

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

zwei 3×3 Jordanblöcke, ein 2×2 Jordanblock.

3 (a)

$$A^{(f)} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ -a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \cdot v_0$$

denn $f(\lambda) = 0$, also $-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1} = \lambda^n$.

(b) λ doppelte Nullstelle von $f \rightsquigarrow f(\lambda) = 0$ und $f'(\lambda) = 0$,

also $0 = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$,

$(*)$ $\quad 0 = n\lambda^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\cdot\lambda^{n-2} + \ldots + 1\cdot a_1\cdot\lambda^0$.

$$A^{(f)} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda \\ 3\lambda^2 \\ \vdots \\ (n-1)\lambda^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \\ 3\lambda^2 \\ 4\lambda^3 \\ \vdots \\ -a_1 - 2a_2\lambda - 3a_3\lambda^2 - \ldots - (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \\ 3\lambda^2 \\ 4\lambda^3 \\ \vdots \\ n\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 2\lambda^2 \\ 3\lambda^3 \\ \vdots \\ (n-1)\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = v_0 + \lambda \cdot v_1.$$

[FSS 2020 LA IIa Lösungen zu Blatt 5]

(c) Definiere für $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ $v_k \in M(n\times 1, K)$ durch

$$v_k := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (k)_k \\ (k+1)_k \cdot \lambda \\ \vdots \\ (n-1)_k \cdot \lambda^{n-1-k} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \leftarrow k+1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Es ist $f^{(k)}(\lambda) = 0$ für $k \in \{0,1,2,\dots,m-1\}$,

also $0 = (n)_k \cdot \lambda^{n-k} + (n-1)_k \cdot a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1-k} + \dots + (k+1)_k \cdot a_{k+1} \cdot \lambda^1 + (k)_k \cdot a_k \cdot \lambda^0 \quad (*)$

$$A^{(1)} \cdot v_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (k)_k \\ (k+1)_k \cdot \lambda \\ \vdots \\ (n-1)_k \cdot \lambda^{n-1-k} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} k \\ \\ \leftarrow k+1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{r} k-1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (k)_k \\ (k+1)_k \cdot \lambda \\ \vdots \\ (n-1)_k \cdot \lambda^{n-1-k} \\ -(k)_k \cdot a_k - (k+1)_k \cdot a_{k+1} \cdot \lambda - \dots - (n-1)_k \cdot a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1-k} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (k)_k \\ (k+1)_k \cdot \lambda \\ \vdots \\ (n-1)_k \cdot \lambda^{n-1-k} \\ (n)_k \cdot \lambda^{n-k} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} k-1 \\ \leftarrow k \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \cdot (k-1)_{k-1} \\ k \cdot (k)_{k-1} \cdot \lambda + (k)_k \cdot \lambda \\ \vdots \\ k \cdot (n-2)_{k-1} \cdot \lambda^{n-1-k} + (n-2)_k \cdot \lambda^{n-1-k} \\ k \cdot (n-1)_{k-1} \cdot \lambda^{n-k} + (n-1)_k \cdot \lambda^{n-k} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} k-1 \\ \leftarrow k \end{array} = k \cdot v_{k-1} + \lambda \cdot v_k$$

$$(x)_k = k \cdot (x-1)_{k-1} + (x-1)_k$$

Bemerkungen: Die Vektoren $\left(v_0, v_1, \frac{v_2}{2!}, \frac{v_3}{3!}, \dots, \frac{v_{m-1}}{(m-1)!}\right)$ liefern einen $m \times m$ Jordanblock zum Eigenwert λ.

Daß es einen solchen Jordanblock gibt, folgt schon aus

$\dim \mathrm{Hau}(A^{(g)}, \lambda) =$ Vielfachheit von λ als Nullstelle von f
$= m$

und

$\mathrm{rang}(A - \lambda \cdot E_n) = n-1$, also $\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda) = 1$.

[4] (a) Sei $A = (v_1 v_2 \dots v_n) \in GL(n, \mathbb{R})$, also ist v_j die j-te Spalte von A.

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ ON-Basis} \iff v_i^{tr} \cdot v_j = \delta_{ij} \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$$
$$\iff A^{tr} \cdot A = E_n$$
$$\iff_{Def} A \text{ orthogonal}$$

(b) (i) Sei $v \in M(n \times 1, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor A mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Beachte $\overline{v}^{tr} \cdot v > 0$, $A^{-1} \cdot v = \lambda^{-1} \cdot v$, $A \cdot \overline{v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v}$, $A^{-1} \cdot \overline{v} = \overline{\lambda}^{-1} \cdot \overline{v}$.

$$\lambda \cdot (\overline{v}^{tr} \cdot v) = \overline{v}^{tr} \cdot (\lambda \cdot v) = \overline{v}^{tr} \cdot A \cdot v = \overline{v}^{tr} \cdot (A^{-1})^{tr} \cdot v = (A^{-1} \cdot \overline{v})^{tr} \cdot v$$
$$= (\overline{\lambda}^{-1} \cdot \overline{v})^{tr} \cdot v = \overline{\lambda}^{-1} \cdot \overline{v}^{tr} \cdot v, \quad \text{also } \lambda = \overline{\lambda}^{-1}.$$

(ii) Annahme: A ist nicht diagonalisierbar. Dann gibt es einen Eigenwert $\lambda \in S^1$ und Vektoren $v_1, v_2 \in M(n \times 1, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ mit $A v_1 = \lambda v_1$, $A v_2 = \lambda v_2 + v_1$, nach Satz 12.15.

$$\overline{v}_1^{tr} \cdot (\lambda v_2 + v_1) = \overline{v}_1^{tr} \cdot A \cdot v_2 = (A^{-1} \cdot \overline{v}_1)^{tr} \cdot v_2 = \overline{\lambda}^{-1} \cdot \overline{v}_1^{tr} \cdot v_2 \underset{(i)}{=} \overline{v}_1^{tr} \cdot \lambda v_2,$$
also $\overline{v}_1^{tr} \cdot v_1 = 0$, Widerspruch.

(iii) $$\lambda_1 \cdot \overline{v}_2^{tr} \cdot v_1 = \overline{v}_2^{tr} \cdot (\lambda_1 \cdot v_1) = \overline{v}_2^{tr} \cdot A \cdot v_1 = (A^{-1} \overline{v}_2)^{tr} \cdot v_1 = \overline{\lambda}_2^{-1} \cdot \overline{v}_2^{tr} \cdot v_1$$
$$\underset{(i)}{=} \lambda_2 \cdot \overline{v}_2^{tr} \cdot v_1, \quad \text{wegen } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ also } 0 = \overline{v}_2^{tr} \cdot v_1. \quad \square$$