FSS 2020 LA IIa Lösungen zu Blatt 4

mit Korrekturen in [4] (b) + (c) vom 09.03.2020

[1] Beweis von Satz 11.26:

(i) Seien v_1 und $v_2 \in V$ mit $[v_1] = [v_2] \in V/U$.
Dann gibt es ein (eindeutiges) $u \in U$ mit $v_1 = v_2 + u$.
Dann ist $\lambda \cdot v_1 = \lambda(v_2 + u) = \lambda \cdot v_2 + \lambda \cdot u \in [\lambda v_2]$,
also $[\lambda \cdot v_1] = [\lambda \cdot v_2]$.
Daher ist die Abbildung $K \times V/U \to V/U$, $(\lambda, [v]) \mapsto [\lambda \cdot v]$, wohldefiniert.

(ii) Sie definiert eine skalare Multiplikation, denn sie kommt von der skalaren Multiplikation auf V.
Genauer:

1. Distributivgesetz: $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$, $[v] \in V/U$.
$$(\lambda + \mu) \cdot [v] = [(\lambda + \mu) \cdot v] = [\lambda v + \mu v] = [\lambda v] + [\mu v] = \lambda [v] + \mu [v].$$

2. Distributivgesetz: $\lambda \in K$, $v, w \in V$, $[v], [w] \in V/U$,
$$\lambda \cdot ([v] + [w]) = \lambda \cdot [v + w] = [\lambda (v + w)] = [\lambda v + \lambda w] = [\lambda v] + [\lambda w] = \lambda [v] + \lambda [w].$$

Assoziativität: $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$, $[v] \in V/U$,
$$(\lambda \cdot \mu) \cdot [v] = [(\lambda \mu) \cdot v] = [\lambda \cdot (\mu \cdot v)] = \lambda \cdot [\mu v] = \lambda \cdot (\mu \cdot [v]).$$

Operation der Eins: $v \in V$, $[v] \in V/U$.
$$1_K \cdot [v] = [1_K \cdot v] = [v]. \qquad \square$$

Daher ist V/U ein K-Vektorraum.

(iii) Nach Satz 11.9 ist die Projektion $\pi_U : V \to V/U$, $v \mapsto [v]$, ein surjektiver (additiver) Gruppenhomomorphismus mit Kern $\ker(\pi_U) = U$. Die Projektion ist linear, denn für $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt:
$$\pi_U(\lambda \cdot v) = [\lambda \cdot v] = \lambda \cdot [v] = \lambda \cdot \pi_U(v).$$

2)

(iv) Aus Satz 5.? (2) der Vorlesung im WiSe 2014 folgt im Fall $\dim V < \infty$:

$\dim V = \dim \ker \pi_U + \dim \mathrm{Bild}(\pi_U)$

$= \dim U + \dim V/U$. $\square$

$\boxed{2}$ (a) 1. Fall, $p = 2$: $(p-1)! = 1! = 1 \equiv -1 \mod 2$ ok.

2. Fall, $p \geq 3$ eine Primzahl: Dann ist $[1] \neq [-1] = [p-1]$.

Laut Hinweis sind $[1]$ und $[p-1]$ die einzigen Elemente $a \in \mathbb{F}_p^*$ mit $a^2 = 1$, also mit $a = a^{-1}$.

Man erhält eine Äquivalenzrelation $\sim_{inv}$ auf $\mathbb{F}_p^*$ mit $a \sim_{inv} b :\Leftrightarrow a = b$ oder $a = b^{-1}$.

Alle Äquivalenzklassen außer $\{[1]\}$ und $\{[p-1]\}$ haben 2 Elemente. Nun rechnet man so in $\mathbb{F}_p$:

$$[(p-1)!] = \prod_{a \in \mathbb{F}_p^*} a = [1]\cdot[p-1] \cdot \Bigg(\prod_{\substack{J = \{a,b\} \text{ Äq.klasse von } \sim_{inv} \\ \text{mit 2 Elementen}}} \overbrace{a \cdot b}^{= [1]} \Bigg)$$

$= [p-1] = [-1]$.

Also $(p-1)! \equiv -1 \mod p$. $\square$

Produkt über alle solchen Äq.klassen

(b) Sei $m = a \cdot b$ mit $a \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

1. Fall, $a = b$: $b \leq m-1$ und $2b \leq m-1$,

also $a \cdot b = b \cdot b \mid (m-1)!$, also $(m-1)! \equiv 0 \mod m$.

2. Fall, $a \neq b$: $a \leq m-1$ und $b \leq m-1$,

also $a \cdot b \mid (m-1)!$, also $(m-1)! \equiv 0 \mod m$.

[FSS 2020 LA IIa Lösungen zu Blatt 4]

3 Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p.
Sei $a \in G \setminus \{e\}$. Dann ist $o(a) > 1$.
Nach Teil (b) des Satzes von Lagrange gilt $o(a) \mid p$.
Also ist $o(a) = p$. Daher hat die von a erzeugte zyklische Untergruppe $\{1, a, a^2, \dots, a^{p-1}\}$ Ordnung p, also ist sie gleich G. Daher ist G zyklisch.

[Auch weniger ausführliche Lösungen sollten akzeptiert werden.]

4 (a) $K_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Nicht verlangt ist folgender Beweis, daß K_4 eine Untergruppe ist:

$a \in K_4 \Rightarrow a^{-1} \in K_4$, denn für alle $a \in K_4$ ist $a^{-1} = a$.

$a, b \in K_4 \Rightarrow a \cdot b \in K_4$: Im Fall $b = a$ ist $a \cdot b = a^2 = id \in K_4$.

Sei $a_1 := (12)(34)$, $a_2 := (13)(24)$, $a_3 := (14)(23)$.

$a_1 \cdot a_2 = (14)(23) = a_3$, mit $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = id$ folgt
$a_2 = a_1 a_3$, $a_1 = a_3 a_2$, $a_2 a_3 = a_1$, $a_3 a_1 = a_2$,
$a_2 a_1 = a_1 a_3 a_1 = a_1 a_2 = a_3$. Das gibt alle Produkte außer denen mit id.

$|A_4 / K_4| = 3$. Wegen Aufgabe 3 ist $A_4 / K_4 \cong C_3$.

(b) $\{id, (12)(34)\} =: T_1$, $\{id, (13)(24)\} =: T_2$, $\{id, (14)(23)\} =: T_3$

$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in A_4$, $\sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in A_4$

$\sigma_1^{-1} (13)(42) \sigma_1 = (12)(34)$, also $\sigma_1^{-1} T_2 \sigma_1 = T_1$,

$\sigma_2^{-1} (14)(23) \sigma_2 = (12)(34)$, also $\sigma_2^{-1} T_3 \sigma_2 = T_1$,

[FSS 2020 LA IIa Lösungen zu Blatt 4]

(c) $\{\mathrm{id}, (123), (132)\} =: R_1$,
$\{\mathrm{id}, (124), (142)\} =: R_2$,
$\{\mathrm{id}, (134), (143)\} =: R_3$,
$\{\mathrm{id}, (234), (243)\} =: R_4$.

$\varphi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\varphi_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in A_4$

$\varphi_1^{-1}(142)\varphi_1 = (123)$, $\varphi_1^{-1}(124)\varphi_1 = (132)$, $\varphi_1^{-1} R_2 \varphi_1 = R_1$.
$\varphi_2^{-1}(134)\varphi_2 = (123)$, $\varphi_2^{-1}(143)\varphi_2 = (132)$, $\varphi_2^{-1} R_3 \varphi_2 = R_1$.
$\varphi_3^{-1}(243)\varphi_3 = (123)$, $\varphi_3^{-1}(234)\varphi_3 = (132)$, $\varphi_3^{-1} R_4 \varphi_3 = R_1$.

$\boxed{5}$ Lösungen zu $b \equiv 2 \bmod 7$ sind $2, 9, 16, 23, \ldots$.
Ihre Reste modulo 11 sind $2, 9, 5, 1, \ldots$.
Also ist $b_0 = 23$ eine Lösung von $\left\{ \begin{array}{l} b \equiv 2 \mod 7 \\ b \equiv 1 \mod 11 \end{array} \right.$

Es ist $b_0 \equiv 10 \mod 13$
und $7 \cdot 11 = 77 \equiv -1 \mod 13$.
Also ist
$$b = 23 + 8 \cdot 77 = 639$$
mit $b \equiv 10 + 8 \cdot (-1) = 2 \mod 13$

eine Lösung von $\left\{ \begin{array}{l} b \equiv 2 \mod 7 \\ b \equiv 1 \mod 11 \\ b \equiv 2 \mod 13 \end{array} \right.$

[Nicht verlangt: Die Menge aller Lösungen ist
$639 + 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \mathbb{Z} = 639 + 1001 \cdot \mathbb{Z}$.