

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

1. (4 Punkte) Beweisen Sie Satz 11.27 der Vorlesung. Alle Resultate der Unterkapitel 11.1, 11.2 und 11.3 können benutzt werden.

Satz 11.27: Sei V ein K -Vektorraum und U ein Untervektorraum. Nach Satz 11.9 ist V/U eine additive abelsche Gruppe. Die Äquivalenzklasse von $v \in V$ wird als $[v] \in V/U$ geschrieben.

Die Abbildung $K \times V/U \rightarrow V/U$, $(\lambda, [v]) \mapsto [\lambda \cdot v]$, definiert eine skalare Multiplikation auf V/U und macht V/U zu einem K -Vektorraum.

Die Projektion $\pi_U : V \rightarrow V/U$, $v \mapsto [v]$, ist eine surjektive lineare Abbildung. Ihr Kern ist $\ker(\pi_U) = U$. Im Fall von $\dim U < \infty$ ist $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

2. (2+2 Punkte) Der Satz von Wilson wurde zuerst von Ibn al Haytham gefunden und dann über 700 Jahre später von Wilson (1770) wiederentdeckt.

Satz von Wilson:

- (i) Sei p eine Primzahl. Dann ist $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
(ii) Es ist $(4-1)! \equiv 2 \pmod{4}$.
(iii) Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ keine Primzahl. Dann ist $(m-1)! \equiv 0 \pmod{m}$.

- (a) Beweisen Sie Teil (i) des Satzes von Wilson.

Hinweise: Man muß in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ rechnen. Die einzigen Elemente a in einem Körper mit $a = a^{-1}$ sind 1 und -1 , denn das sind die einzigen Nullstellen des Polynoms $x^2 - 1$.

- (b) Beweisen Sie Teil (iii) des Satzes von Wilson.

3. (2 Punkte) Beweisen Sie: Sei p eine Primzahl. Dann gibt es bis auf Isomorphie nur eine Gruppe der Ordnung p , die zyklische Gruppe.

Hinweis: Welche Ordnungen haben die Elemente einer beliebigen Gruppe der Ordnung p ?

Notation: Diese Gruppe wird mit multiplikativer Verknüpfung C_p genannt (C für Cyclic).

4. (3 Punkte) Untergruppen, Normalteiler und Quotientengruppen der A_4 .

Erinnerung an LA I im HWS 2014:

$$A_4 = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Wegen des Satzes von Lagrange kann es höchstens Untergruppen der Ordnungen 1, 2, 3, 4, 6, 12 geben. Ordnung 1: $\{\text{id}\}$. Ordnung 12: A_4 .

- (a) Geben Sie eine Untergruppe K_4 der Ordnung 4 an. Es gilt (Sie müssen es nicht zeigen), dass sie die einzige Untergruppe der Ordnung 4 ist. Daher ist sie ein Normalteiler. Welche Gruppe ist die Quotientengruppe A_4/K_4 (bis auf Isomorphie)?
- (b) Geben Sie drei Untergruppen der Ordnung 2 an. Zeigen Sie, dass sie alle konjugiert sind.
- (c) Geben Sie vier Untergruppen der Ordnung 3 an. Zeigen Sie, dass sie alle konjugiert sind.

Bemerkung: Das sind alle Untergruppen der A_4 . Insbesondere gibt es keine Untergruppe der Ordnung 6, und die einzigen Normalteiler sind $\{\text{id}\}$, K_4 und A_4 .

5. (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung b des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}b &\equiv 2 \pmod{7} \\b &\equiv 1 \pmod{11} \\b &\equiv 2 \pmod{13}\end{aligned}$$

Skizzieren Sie auch Ihren Lösungsweg.

Abgabe bis Montag, den 09. März 2020, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5