Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Khadija Larabi

Blatt 1
10.02.2020

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

1. *(3 Punkte)* Führen Sie mit den Zahlen $r_0 = 158$ und $r_1 = 90$ den erweiterten Euklidischen Algorithmus durch, und geben Sie in einer Tabelle die Zahlen r_i, q_i, x_i, y_i mit

$$\begin{aligned} r_{i-2} &= q_{i-1}r_{i-1} + r_i, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_i &= x_{i-2} - q_{i-1}x_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_i &= y_{i-2} - q_{i-1}y_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ \text{(und deshalb auch } r_i &= x_i r_0 + y_i r_1) \end{aligned}$$

   bis $i = n$ mit $r_{n+1} = 0$ (und $r_n = \text{ggT}(r_0, r_1)$) an. Geben Sie auch n an.

2. *(3+3 Punkte)*

   (i) Formulieren Sie die Teile (b), (c) und (d) von Satz 10.2.

   (ii) Beweisen Sie Teil (d) von Satz 10.2.

3. *(4 Punkte)* Der erweiterte Euklidische Algorithmus funktioniert auch bei Polynomringen $K[x]$ statt des Rings $\mathbb{Z}$. Hier wird $\deg r_i < \deg r_{i-1}$ gefordert.

   Führen Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus mit den Polynomen $r_0 = x^4 + x^3 + x + 1$ und $r_1 = x^3 + x^2 - x \in \mathbb{Q}[x]$ durch. Geben Sie das Ergebnis in einer Tabelle wie in den Beispielen 10.3 (a) und (b) der Vorlesung an. Nur x_{n+1} und y_{n+1} brauchen Sie nicht zu berechnen.

4. *(3 Punkte)* Beweisen Sie den folgenden Satz (Binet (1841), Lamé (1844)):

   Es seien $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$ mit $r_0 > r_1$ und $r_1 < F_{k+1}$ ($= k+1$-te Fibonacci-Zahl) für ein $k \geq 2$. Dann erfüllt die Anzahl n der Schritte im Euklidischen Algorithmus (mit $r_{n+1} = 0$ und $r_n = \text{ggT}(r_0, r_1)$

$$n \leq k - 1.$$

   Hinweise: Induktiv vorgehen. Induktionsanfang bei $k = 2$. Zeigen Sie im Induktionsschritt, dass aus der Aussage für $k - 1$ und aus der Aussage für $k - 2$ die Aussage für k folgt. Unterscheiden Sie die Fälle $(r_2 < F_k)$ und $(r_3 < F_{k-1})$ und $(r_2 \geq F_k\ \&\ r_3 \geq F_{k-1})$. Tritt der 3. Fall auf?

Abgabe bis Montag, den 17. Februar 2020, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5