Aufgabe 1 (4P) erhaltene Punkte:

(a) (1P) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ affine Räume. Geben Sie an, wann eine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *affin* ist.

(b) (3P) Geben Sie ein Beispiel eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über dem Körper $K = \mathbb{F}_2$ an, bei dem es mehr Kollineationen als affine bijektive Abbildungen gibt. Begründen Sie das Beispiel.

Aufgabe 2 (2P) erhaltene Punkte:

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann ist $|.| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle}$, eine Norm auf V.
Das Skalarprodukt erfüllt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ gilt

$$\begin{aligned} |\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle| &\leq |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|, \\ \text{und } |\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle| &= |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \iff \Big(\overrightarrow{a} = 0 \text{ oder } \overrightarrow{b} = 0 \text{ oder } \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{a} = \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{b} \Big). \end{aligned}$$

Beweisen Sie die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| &\leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|, \\ \text{und } |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| &= |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \iff \Big(\overrightarrow{a} = 0 \text{ oder } \overrightarrow{b} = 0 \text{ oder } \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{a} = \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{b} \Big). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4P) erhaltene Punkte:

Geben Sie 4 verschiedene Bedingungen dafür an, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Bei den Bedingungen soll man nichts weglassen dürfen. Sie sollen als Gleichheit von gewissen Längen oder Winkeln formuliert sein. Machen Sie ohne Kommentar zu jeder Bedingung eine kleine, aber aussagekräftige Skizze.

Aufgabe 4 (4P) erhaltene Punkte:

Es gibt sieben Klassen von Isometrien des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie in der folgenden Tabelle ihre Namen, ihre Fixpunktmengen und die Anzahl der Parameter an.

Name	Fixpunktmenge	Anzahl der Parameter

Aufgabe 5 (2P) erhaltene Punkte:

Die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/10}$ erfüllt $0 = \zeta^5 + 1 = (\zeta + 1)(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1)$, wegen $\zeta + 1 \neq 0$ also auch $0 = \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1$. Und natürlich ist $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{10}$.

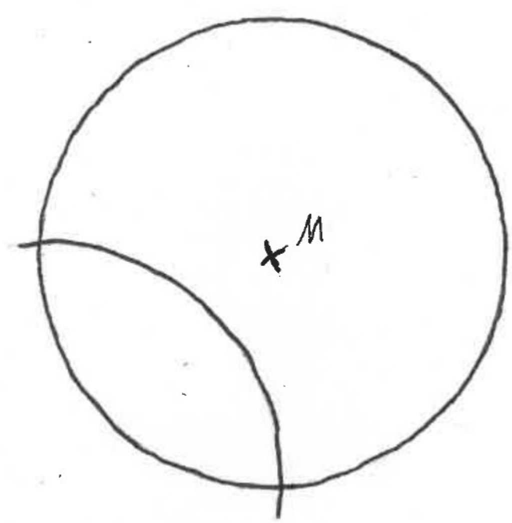
Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ ab, die von $2\cos\frac{2\pi}{10}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $2\cos\frac{2\pi}{10}$ aus.

Bemerkungen: Wegen dieser Formel kann man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Zahl $2\cos\frac{2\pi}{10}$ heißt goldener Schnitt.

Aufgabe 6 (2P) erhaltene Punkte:

(a) (1P) Geben Sie die Formel an, die bei einem hyperbolischen Dreieck Δ seine Fläche Fläche(Δ) und die Innenwinkel α, β, γ verbindet.

(b) (1P) Der folgende Kreis soll der Rand des Kreisscheibenmodells der hyperbolischen Ebene sein. Eingetragen sind der Mittelpunkt M und eine hyperbolische Gerade G mit $M \notin G$. Skizzieren Sie hinreichend genau hinreichend viele der zu G parallelen Geraden, die durch M laufen. Ihre Skizze soll zeigen, dass Sie die Familie dieser Geraden verstehen.

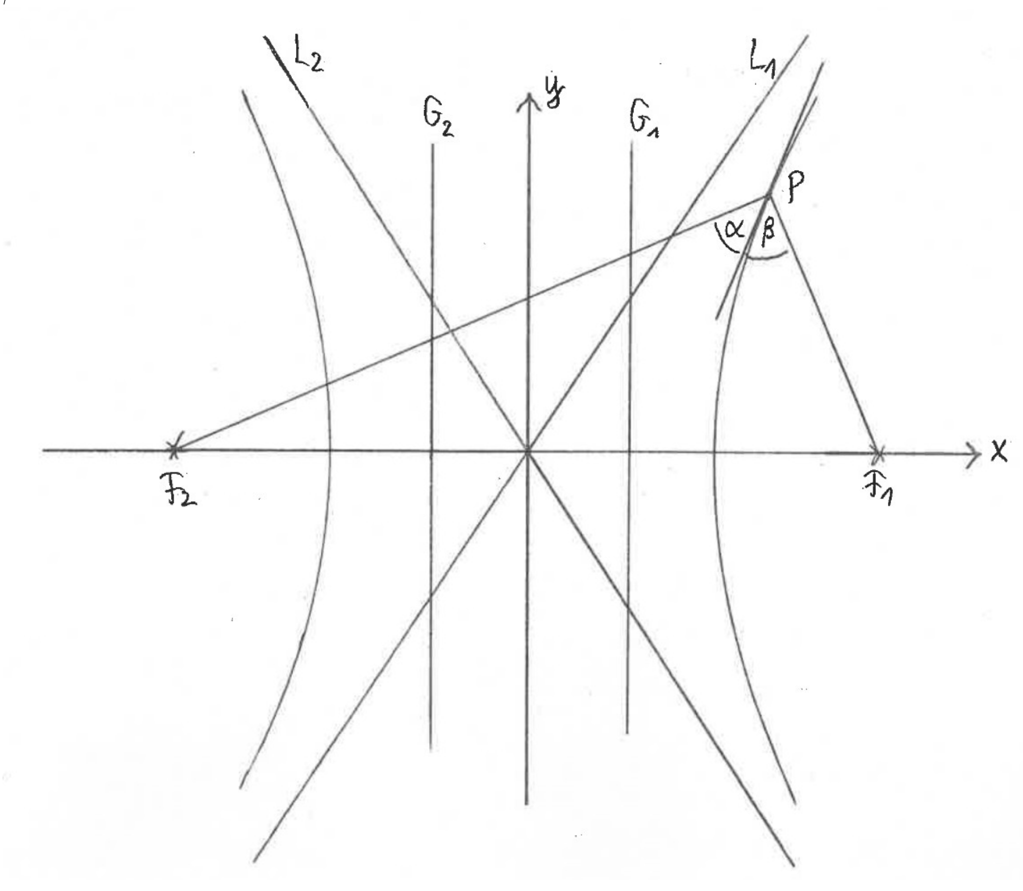


Aufgabe 7 (3P) erhaltene Punkte:

Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Hyperbel

$$\mathcal{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

in der Standardnormalform hat zwei Komponenten. Sie schmiegen sich an die Geraden $L_1 := \{(x, y) \mid \frac{x}{a} = \frac{y}{b}\}$ und $L_2 := \{(x, y) \mid \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}\}$. Die Hyperbel hat die Brennpunkte $F_1 = (\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ und $F_2 = (-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ und die Leitgeraden $G_1 = \left\{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\} \times \mathbb{R}$ und $G_2 = \left\{\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\} \times \mathbb{R}$. Die Exzentrizität ist $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \in \mathbb{R}_{>1}$.
Die folgende Skizze zeigt $\mathcal{H}, L_1, L_2, F_1, F_2, G_1, G_2$, einen Punkt $P \in \mathcal{H}$ und zwei Winkel α und β.



Formulieren Sie die drei (in der Vorlesung so genannten) *ästhetischen Eigenschaften*.

Aufgabe 8 (3P) erhaltene Punkte:

Satz vom Winkelhalbierendenschnittpunkt: *Die drei Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

Beweisen Sie diesen Satz und machen Sie eine Skizze zu Ihrem Beweis.